



国科标商院 280216070200P1002 科研 Title

何应. 张潘.

Cybertron Yhs

第一章 绪论

第1节 绪论 1学时 何颂

第二章 线性代数复习

第1节 线性空间和向量基, 线性变换和线性算符 1学时 何颂

第2节 相似变换, 本征矢量和矩阵对角化, 矢量内积 1学时 何颂

第3节 么正矩阵、厄米矩阵、正交矩阵、实对称矩阵的概念和性质, 矩阵的直乘 1学时 何颂

第三章 群的基本概念

第1节 群的定义及一般性质, 物理系统中经常用到的群, 群的简单分类、生成元与秩 1学时 何颂

第2节 有限群的重排定理及乘法表 1学时 何颂

第3节 子群, 陪集, 拉格朗日定理 1学时 何颂

第4节 共轭元素, 共轭等价类, 不变子群和商群 1学时 何颂

第5节 同态和同构的定义及相关概念 1学时 何颂

第6节 同态核定理, 群的直积 1学时 何颂

第7节 点群的定义及分类, N阶循环群的定义、构造、生成元、子群、类等概念 1学时 张潘

第8节 正N边形对称群 D_N 的定义、构造、生成元、子群、类等概念, 以及在正多边形系统中的应用 1学时 张潘

第9节 正多面体对称群 T 群、 O 群和 I 群的定义、构造、生成元、子群、类等概念, 以及在正多面体系统中的应用 1学时 张潘

第10节 I 型和 P 型非固有点群的定义及构造 1学时 张潘

第11节 晶体结构的数学抽象, 晶体系统中平移、旋转、及其复合等对称性操作, 平移群、空间群、简单空间群、晶体点群等概念 1学时 张潘

第12节 晶体点群 (11种固有点群和21种非固有点群) 1学时 张潘

第13节 点群操作对晶格形状的限制, 七大晶系 1学时 张潘

第14节 点群操作对原始格子上增加不破坏原始格子对称性点的限制, 14种布拉菲格子和73种简单空间群 1学时 张潘

第四章 群的线性表示理论

第1节 线性表示的定义、特征标, 真实表示、非真实表示、恒等表示、自身表示、么正表示、实正交表示 1学时 何颂

第2节 群的表示空间, 等价表示, 有限群表示的么正性 1学时 何颂

第3节 有限群的可约表示与不可约表示的定义及一般性质 1学时 何颂

第4节 群空间, 群函数, 群代数 1学时 何颂

第5节 有限群的正则表示及其性质, 内禀正则表示 1学时 何颂

第6节 舒尔定理及其推论 1学时 何颂

第7节 正交定理及其推论 1学时 何颂

第8节 表示的完备性 1学时 何颂

第9节 商群的不可约表示, 表示的直乘, 直乘群的表示 1学时 张潘

第10节 分导表示和诱导表示 1学时 张潘

第11节 有限群不可约表示特征标表的构造, 循环群、 D_2 群、 D_3 群、 D_4 群的特征标表 1学时 张潘

第12节 T 群、 O 群的特征标表 1学时 张潘

第13节 定态波函数按对称群表示分类, 有限群直乘表示的约化, 克莱布施-戈登级数与系数 1学时 张潘

第14节 维格纳-埃伽定理, 不可约张量算符及其矩阵元 1学时 张潘

第15节 正则简并与偶然简并, 选择定则 1学时 张潘

第16节 物理应用举例 1学时 张潘

新近 群论及算符在凝聚态物理中的应用.
Carter Visual Group Theory
A-Zee Group Theory in a nutshell for physicists.

量子物理. Clifford群. 量子计算

轨道-稳定性定理

酉群定理. 群论. 伽罗华群 (域的扩张)

第五章 置换群

[Cayley diagram].

第1节 置换群的基本概念, 轮换和轮换结构 1学时 张潘

第2节 置换群的类、交变子群, 置换群的生成元 1学时 张潘

第3节 投影算符, 群代数的不可约基 1学时 张潘

第4节 群代数的理想和幂等元 1学时 张潘

第5节 有限群群代数的分解 1学时 张潘

第6节 杨图、杨表、杨算符, 置换群群代数的原始幂等元 1学时 张潘

第7节 置换群的不可约标准表示 1学时 张潘

第8节 置换群的不可约正交表示 1学时 张潘

第9节 置换群不可约表示的内积, 克莱布施-戈登级数与系数 1学时 张潘

第10节 置换群不可约表示的外积, Littlewood-Richardson规则, 分导表示的约化 1学时 张潘

第六章 三维转动群

第1节 $SO(3)$ 群的定义及简单性质 1学时 何颂

第2节 $SU(2)$ 群的定义及简单性质 1学时 何颂

第3节 $SO(3)$ 群与 $SU(2)$ 群的同态关系 1学时 何颂

第4节 李群的基本概念、生成元、伴随表示 1学时 何颂

第5节 $SO(3)$ 群与 $SU(2)$ 群的群空间及其连通性和连通度 1学时 何颂

第6节 紧致李群上的积分、线性表示理论 1学时 何颂

第7节 $SO(3)$ 群与 $SU(2)$ 群的欧拉角参数化 1学时 何颂

第8节 $SU(2)$ 群的不等价不可约表示 1学时 何颂

第9节 $SO(3)$ 群与 $O(3)$ 群的不等价不可约表示 1学时 何颂

第10节 $SU(2)$ 群直乘表示的约化, 克莱布施-戈登级数与系数 1学时 何颂

第11节 标量场、矢量场、旋量场、张量场及其在空间转动下的变换规则 1学时 张潘

第12节 $SO(3)$ 群、 $SU(2)$ 群与角动量理论的联系, 不可约张量算符, 维格纳-埃伽定理 1学时 张潘

第七章 $SU(N)$ 群的张量表示

第1节 $SU(N)$ 群的张量表示 1学时 何颂

第八章 洛伦兹群与庞加莱群简介

第1节 洛伦兹群与庞加莱群简介 1学时 何颂

Group Theory in a Nutshell for physicists

I (1-2) II (1-3)

III Q.M. V.M. 16

IV (1-7)

VII (1-5)

Lie群群论考试: $SU(2)$, $SO(3)$ 特征标, 正交性, $2 \rightarrow 1$ 映射. C-G系数推导.

考试: D_3 群操作方式, 转动方式, 特征标方式 $\Rightarrow$ 表示矩阵 (二维).

[凯莱图] [直群]

分类. 表示. 特征标.

第一章 线性代数复习 (参考马中骥《物理学中的群论》)

§1.1 线性空间和向量基

1° 主要概念

线性空间 (m 维) (实)

零向量线性相关/线性无关 $\Rightarrow$ 向量基

零向量与零空间

线性空间的子空间 (n 维 $n < m$)

子空间的和/并 $L_1 + L_2$

子空间的交 $L_1 \cap L_2$

※ 子空间的直和 $L = L_1 \oplus L_2 \Rightarrow$ 互补子空间

2° 重要结论

m 维线性空间中线性无关的向量数目不能大于 m .

3° 具体实例

量子力学哈密顿量 E 的 m 重简并态

§1.2 线性变换和线性算符.

1° 主要概念

线性算符 $\Rightarrow$ 线性变换

矩阵迹

逆矩阵 $\Rightarrow$ 非奇矩阵

对易关系

算符 R 的不变空间

2° 重要结论

对给定的矢量基, 线性算符 R 与其矩阵形式 $D(R)$ 一一对应 [表示] $Re_\mu = \sum_\nu e_\nu D_{\nu\mu}(R)$

算符 R 对不变空间中任意矢量 a 的作用 $Ra = b \in \mathcal{I} \Rightarrow b_\nu = \sum_\mu D_{\nu\mu}(R) a_\mu$

3° 具体实例

算符 $R(x)$ 与哈密顿量 H 对易 $[H, R(x)] = 0 \Rightarrow \psi(x)$ 与 $R(x)\psi(x)$ 是同一本征值的本征函数

算符 $R(x)$ 在空间 $\mathcal{I}$ 中关于基 $\psi_\mu(x)$ 的矩阵形式为 $D_{\mu\nu}(R)$

§ 1.3 相似变换.

1° 主要概念

新旧两组向量基之间的变换关系

同一向量在两向量基中分量之间的联系

同一算符在两向量基中矩阵形式之间的联系——相似变换

2° 重要结论

向量基的变换不改变算符对矢量的作用

若 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ 且 $\mathcal{L}$ 空间 $\mathcal{L}_1$ 与 $\mathcal{L}_2$ 的维数是 m 和 n , $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ 对算符 R 是不变的

$$\text{则有 } S^{-1} D(R) S = \bar{D}(R) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(R)_{m \times m} & 0 \\ 0 & D^{(2)}(R)_{n \times n} \end{pmatrix} = D^{(1)}(R) \oplus D^{(2)}(R)$$

矩阵直和

§ 1.4 本征向量和矩阵对角化

1° 主要概念

本征方程

本征值满足的久期方程

2° 重要结论

本征值的和为算符矩阵形式的迹 $\sum_{\mu} \lambda_{\mu} = \text{Tr } D(R)$

本征值的积为算符矩阵形式的行列式 $\prod_{\mu} \lambda_{\mu} = \det D(R)$

§ 1.5 向量内积

1° 主要概念

线性空间中两向量的内积 $\Rightarrow$ 向量的模平方.

任意两向量的内积

正交归一的向量基

2° 重要结论

向量基的内积可以写为正定的厄米矩阵形式

可以利用向量基的正交归一性计算线性算符 R 的矩阵元素 $D_{\mu\nu}(R)$

3° 具体实例

量子力学两波函数内积

§ 1.6 矩阵的特殊性质

1° 主要概念

么正矩阵

厄米矩阵

正交矩阵

对称矩阵

§ 1.7 矩阵的直积.

1° 主要概念

两个线性空间的直积

2° 重要结论

若两空间关于线性算符 R 不变, 有 m 维矩阵 $D^{(1)}(R)$ 和 n 维矩阵 $D^{(2)}(R)$

则在 mn 维直积空间中 R 算符关于乘积基的矩阵形式是 $[D^{(1)}(R) \times D^{(2)}(R)]_{ij,kl} = D_{ik}^{(1)}(R) D_{jl}^{(2)}(R)$

矩阵直积的六条性质.

3° 具体实例

两个由子系统组成的量子体系, 波函数表为两个子系统波函数的乘积.

$$\text{二维矩阵直积 } X \times Y = \begin{pmatrix} X_{11}Y & X_{12}Y \\ X_{21}Y & X_{22}Y \end{pmatrix}$$

第二章 群的基本概念.

§2.1 群

1° 重要概念.

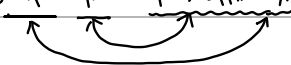
群 = 集合 + 乘法 满足封闭性, 结合律, 存在元, 逆元

群乘法表. [通过左陪集是否相等判断共轭元素, 寻找不变子群] 各行, 各列都是群元素的重排.

有限群与无限群

Abel群与非Abel群

有限群的生成元与秩: 由最小数目个群元素的乘积组成有限群



2° 重要结论

定理 2.1 重排定理: 设 $G = \{ \dots, g_n, \dots \}$, 对 $\forall h \in G$, 当 g_n 取遍 G 中所有元素时, hg_n 给出且仅仅一次给出 G 中所有元素.

3° 具体实例

群: 空间反演群 $\{E, I\}$; n 所置换群; 正三角形的纯转动群 D_3 ; 整数加法群

群乘法为矩阵乘法下. 全体 n 维非奇异矩阵的集合构成 $GL(n, \mathbb{C})$ 实矩阵有 $GL(n, \mathbb{R})$

n 维正矩阵构成 $U(n)$, n 维实正交矩阵构成 $O(n)$

约束行列式为 1 $\Rightarrow SL(n, \mathbb{C}); SL(n, \mathbb{R}); SU(n); SO(n)$

循环群 C_n 是由一个元素 R 及其幂次构成的有限群, n 为群的阶 / 群元 R 的阶, R 为生成元.

C_4 群的阶为 4, 生成元为 R 或 R^3 , R^2 周期为 $\{E, R^2\}$.

正 N 边形对称变换群 D_N : 对称变换轴有 1 个 N 次轴, N 个二次轴

$$T^N = S_j^2 = E$$

群阶为 $2N$, 秩为 2.

$$\{E = T^N, T, T^2, \dots, T^{N-1}\} \quad \downarrow \quad \{S_0, S_1, \dots, S_{N-1}\}$$

$$T^m = S_{j+m} S_j = S_j S_{j-m}$$

$$T^m S_j = S_{j+m}$$

$$S_j T^m = S_{j-m}$$

§2.2 子群与陪集

1° 主要概念

(逆元)

子群 验证子集是否构成子群 —— 验证子群是否满足封闭性 列出循环子群 + 并起来是否满足封闭性

群元的阶 (循环子群 $\langle x \rangle$): 满足 $x^n = E$ 的最小正整数 n 群的阶: 有限群中元素的数目.

陪集 子群 H 左乘/右乘一个不属于 H 的元素 g 构成的集合 gH/Hg $\begin{cases} \text{与 } H \text{ 无公共元素} \\ \text{无重复元素} \\ \text{公共元素} \Rightarrow \text{陪集相同} \end{cases}$

2° 重要结论

定理 2.2 陪集定理: 设群 H 是 G 的子群, 则 H 的左(右)陪集或者完全相同, 或者没有任何公共元素.

定理 2.3 拉格朗日定理: 有限群子群的阶, 必为群阶的因子

$$\Rightarrow \text{陪集分解群 } G = H \cup g_1 H \cup g_2 H \dots$$

3° 具体实例

群 (非平庸): 6阶循环群中 $\{a^2, e\}, \{a, a^3, e\}$; 实数加法群中整数加法群; $SO(3)$ 群中绕固定轴转动群

四元数群 V_4 中 $\{e, \sigma\}, \{e, \tau\}, \{e, \rho\}$.

群元的阶: D_3 中 $\{d, f, e\}$ d 的阶为 3, f 的阶为 3 $\{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\}$ a, b, c 的阶均为 2

循环群: 由一个元素 R 及其幂次构成的有限群

$\Rightarrow$ 绕空间固定轴转动 $\frac{2\pi}{n}$ 角的变换生成的群

(对称变换) n 次固有转动轴, 方向由右手螺旋法则得到

§ 2.3 类与不变子群

1° 主要概念

共轭 通过相似变换联结的群元 $gfg^{-1}=h \Rightarrow f \sim h$.

类 所有相互共轭的元素构成的集合

相逆类: 类中元素的逆元构成的集合与原类 $\Rightarrow$ 自逆类: 元素与其逆元素互相共轭

共轭子群

不变子群/正规子群 所有左陪集=右陪集 $\Rightarrow$ 由若干个完整的类组成

商群: 不变子群 H 将 G 分为 $\{g \cdot H, g \cdot H, \dots\}$ 乘法对应 $g_i h_a g_j h_b = g_k h_r \rightarrow f_i f_j = f_k \Rightarrow G/H$.

恒元是不变子群 H

2° 重要结论

定理 2.4 有限群的每个类中元素的个数都是群阶的因子.

定理 2.5 设 H 是 G 的不变子群, 对 $\forall g \in G$, 当 h 取遍 H 中所有元素的时候, ghg^{-1} 给出且仅一次给出 H 中所有元素

定理 2.6 不变子群的左陪集与右陪集是重合的

对群进行分割: $\left\{ \begin{array}{l} \text{按陪集分割} \rightarrow \text{群元被等分为若干部分.} \\ \text{按类分割} \end{array} \right.$

3° 具体实例

商群: $D_3 = \{e, a, b, c, d, f\}$ 中 非平庸不变子群 $H = \{e, d, f\}$

$eH = \{e, d, f\}$

$aH = \{a, b, c\}$

$\downarrow$
 e

$\downarrow$
 a

$D_3/H = \mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$.

§ 2.4 同构与同态

1° 主要概念

同构与同构映射. [一一对应的满映射]

同态与同态映射 [满映射] G 与 F 同态, F 中任一元素对应多个 G 中元素.

同态核 $G \sim F$, G 中与 F 的单位元素对应的所有元素构成的集合 H .

保持不要 自同构映射: 群 G 到自身 $\Rightarrow$ 自同构群 $A(G)$ (最大子群) 其子群被称为“一个”自同构群

内自同构映射: 群中元素 u 对 $\forall g \in G$ 作 $ugu^{-1} \in G \Rightarrow$ 内自同构群 $I(G)$.
相似变换

2° 重要结论 证明 ① 同态核是 G 的子群 (封闭, 有逆) ② 不变子群 $\{ghag^{-1} \in H\}$ ③ 同构

定理 2.7 同态核定理: 设 G 与 F 同态, 则有 1) 同态核 H 是 G 的不变子群

2) 商群 G/H 与 F 同构

逆定理: 商群 G/H 与 F 同构, 则 G 与 F 同态且不变子群 H 为同态核.

Abel 群的内自同构映射都是恒等映射

$I(G)$ 是 $A(G)$ 的不变子群

3° 具体实例

同构关系: 空间反演群 $\{E, I\} \cong$ 二阶循环群 $\{e, a\}$; $Z_3 \cong D_3$; $\{1, i, -1, -i\} \cong C_4$

同一群的不同子群同构, 如 D_3 中 $\{e, a\} \cong \{e, b\} \cong \{e, c\}$; 正实数乘法群 $\cong$ 实数加法群.

同态核定理应用: D_3 群与 Z_3 群同态, 同态核 $H = \{e, d, f\}$ 是不变子群, 商群 $D_3/H \cong Z_2$

自同构群: $Z_3 = \{e, a, a^2\}$ 的自同构群 $\{\text{恒等映射}, e \text{ 不变}, a, a^2 \text{ 互换}\} \cong Z_2$, 内自同构群 $\{\text{恒等映射}\}$

同构层面上四阶群仅有两种 — C_4 或 $V_4 (D_2)$ 六阶群仅有两种 — C_6 或 D_3

§ 2.5 变换群 (略)

1° 主要概念 变换操作 $\Rightarrow$ 构成变换群 / 变换对象性质.

变换(置换) f : 将集合 X 映向其自身的一个映射 $f(x)=y \in X \Rightarrow X$ 上的完全对称群

X 为 n 个元素的集合, 其完全对称群被称为 X 上的 n 阶置换群 S_n

X 为群 G , 变换对象为群元, 则有完全对称群 S_G

等价性: $\exists g \in G$ 是 X 上变换群中的一个变换, X 中元素 x, y 有 $g(x)=y$, 则 $x \sim y$

共轭

x 的 G 轨道: $x \in X, \forall g \in G$, 由 X 中所有与 x 等价的元素集合 $\{g(x)\}$.

类

G 在 X 上的不变子集: 子集 $Y \subset X, \forall g \in G$ 有 $g(Y)=Y$ 轨道都是 G 不变的

不变子群

G 对 x 的逆问子群/轨道稳定子: G 的子群 G^x 保持 x 不变 $G^x = \{h \mid h \in G \text{ 且 } hx=x\}$.

2° 重要结论

证明: 群 G 中元素 $g \in G \rightarrow G$ 上变换 g 给出 gG

定理 2.8 凯莱定理: 群 G 同构于 S_G 的一个子群

恒元 e , 逆元 $g^{-1} \Rightarrow$ 形成 S_G 的一个子群 $\cong G$

定理 2.1 G^x 的左陪集 $gG^x = \{gh \mid g[h(x)] = g(x)=y\}$ 与 x 的轨道上的点 y 一一对应.

轨道稳定子定理: 群 G 的阶为 n , 逆问子群 G^x 阶为 m , 则 x 的 G 轨道上的点共有 n/m 个.

§ 2.6 直积与半直积

1° 主要概念

G_1 与 G_2 的直积群: $g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$ 组成有序对 $g_{\alpha\beta} = (g_{1\alpha}, g_{2\beta})$

$G_1 \otimes G_2$ 乘法法则为 $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha'\beta'} = (g_{1\alpha}, g_{2\beta}) \cdot (g_{1\alpha'}, g_{2\beta'}) = (g_{1\alpha} g_{1\alpha'}, g_{2\beta} g_{2\beta'})$

G 的直积因子: $\forall g_{\alpha\beta} \in G$ 可以唯一分解为 $g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha} g_{2\beta}$, 其中 $g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$

且 $g_{1\alpha} g_{2\beta} = g_{2\beta} g_{1\alpha}$ 则 $G = G_1 \otimes G_2$.

G_1 与 G_2 的半直积群: 有 G_1 的自同构映射群 $A(G_1)$ 与 G_2 同态, 即 $\forall g_{2\beta} \in G_2$ 对应一个 G_1 的自同构映射 $\nu_{g_{2\beta}}$

$G_1 \otimes_s G_2$ 则有序对 $g_{\alpha\beta} = \langle g_{1\alpha}, g_{2\beta} \rangle$ 满足乘法法则

$g_{\alpha\beta} g_{\alpha'\beta'} = \langle g_{1\alpha}, g_{2\beta} \rangle \cdot \langle g_{1\alpha'}, g_{2\beta'} \rangle = \langle g_{1\alpha} \nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'}), g_{2\beta} g_{2\beta'} \rangle$

2° 重要结论

G 的直积因子 G_1 与 G_2 之间乘法互易, 两者之间只有一个公共因子 e 且都是 G 的不变子群

G_1 与 G_2 的半直积群 $G_1 \rtimes G_2$ 中 G_1 是其不变子群.

3° 具体实例

直积群: 三维空间所有向量的集合 + 向量加法 = G

其直积因子为 xy 平面上的向量加法群 G_1 与 z 轴上的向量加法群 G_2 ;

$Z_6 = \{e, a\} \otimes \{e, a, a^2\}$; D_3 群 $G_1 = \{e, d, f\}$ $G_2 = \{e, a\}$ 乘法不对易

半直积群: D_3 群中 $G_1 = \{e, d, f\}$, $G_2 = \{e, a\}$

G_1 的自同构群 $A(G_1) = \{Ve, Va(d \leftrightarrow f)\}$ 同构于 G_2

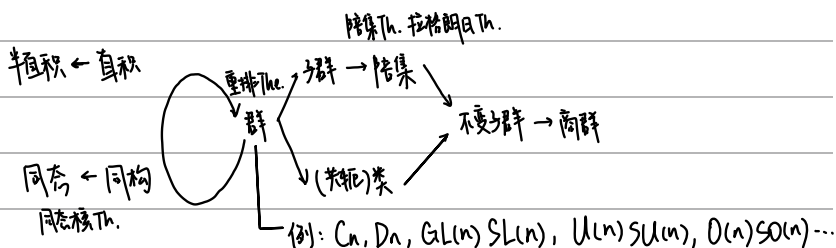
半直积群 $G_1 \rtimes G_2 = \{\langle e, e \rangle, \langle e, a \rangle, \langle d, e \rangle, \langle d, a \rangle, \langle f, e \rangle, \langle f, a \rangle\}$.

对应 $D_3 = \{e, a, d, c, f, b\}$

乘法 $\langle d, a \rangle \langle f, a \rangle = \langle dVa(f), aa \rangle = \langle dd, aa \rangle = \langle f, e \rangle$ 即 $cb = f$

交换律破坏. $\langle f, a \rangle \langle d, a \rangle = \langle fVa(d), aa \rangle = \langle ff, aa \rangle = \langle d, e \rangle$ 即 $bc = d$

且 G_1 为 D_3 的不变子群



第三章 群表示理论 [有限群]

寻找有限群的不等价不可约表示.

§3.1 群表示.

1° 基本概念.

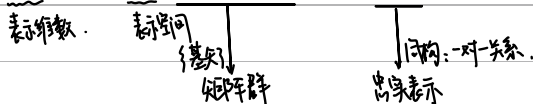
线性空间 [数域上的向量集合 + 加法, 数乘运算 + 封闭性, 交换律, 结合律, 么元与逆元] V

线性无关 $\Rightarrow$ 线性空间的维数 $\Rightarrow$ 基 (任意性) $\Rightarrow$ 向量的坐标.

线性变换 [映射 $V \rightarrow V$, 线性性] + 基 $\Rightarrow n \times n$ 矩阵 $\Rightarrow$ 坐标变换

$\Rightarrow$ n 维复一般线性群 $GL(V, \mathbb{C})$, V 上的线性变换群 $L(V, \mathbb{C})$

群表示: 群 G 到 n 维复线性空间 V 上的线性变换群 $L(V, \mathbb{C})$ 的同态映射 A



忠实表示: $G \rightarrow L(V, \mathbb{C})$ 的映射是一一对应的同构

2° 重要结论

求群表示矩阵的方法: 对所有基矢进行变换, 按旧基展开, 展开系数为表示矩阵的列

旧基 $\{\vec{e}_i\} \rightarrow$ 新基 $\{\vec{e}'_i\}$. $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

表示空间的基为函数 + 抽象群群元为其变量的变换 $\Rightarrow$ 函数变换满足的规律是 $A(g_\alpha) \psi_i(\vec{r}) = \psi_i(g_\alpha^{-1} \vec{r})$

$\{\psi_1(\vec{r}), \psi_2(\vec{r}), \dots, \psi_n(\vec{r})\}$ $\vec{r}' = g_\alpha \vec{r}$ 对称性要求 $\psi_i(\vec{r}') = \psi_i(\vec{r})$. 故 $\psi_i(\vec{r}') \rightarrow \psi_i(\vec{r}) = \psi_i(g_\alpha^{-1} \vec{r})$

$$\vec{r}' = g_\alpha \vec{r} \rightarrow \vec{r} \quad \vec{r} \rightarrow g_\alpha^{-1} \vec{r}$$

g_α 作用于 $\vec{r}$ 上 $\xrightarrow{\text{表示 } A}$ $A(g_\alpha)$ 作用于 $\psi_i(\vec{r})$

矩阵形成 $\leftarrow A(g_\alpha)$ 作用于每一个基函数上得到新函数 $A(g_\alpha) \psi_i(\vec{r})$

在基函数上的展开系数

$$\begin{aligned} &= \psi_i(g_\alpha^{-1} \vec{r}) \\ &= \sum_j \psi_j(\vec{r}) A_{ji}(g) \end{aligned}$$

3. 具体实例

群表示: 任何群 G , 都与 $\{1\}$ (任意阶单位矩阵) 同态

矩阵群: 自然存在忠实表示

同构群的群表示相互适用:

表示空间为三维实空间

$\{E, \sigma_k\}$ (对 xy 平面的反射) $\{E, C_k(\varphi)\}$ (绕 z 轴转角) $\{E, I\}$ (空间反演)

恒等变换: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rightarrow \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表示为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $C_k(\varphi): \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rightarrow -\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k}$ 表示为 $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_k: \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rightarrow \vec{i}, \vec{j}, -\vec{k}$ 表示为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $I: \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rightarrow -\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}$ 表示为 $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

连续群表示: 绕 z 轴的转动群 $\{C_k(\varphi)\}$, 表示空间为三维实空间, 表示矩阵为 $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

变换作用于基矢给出基矢线性组合, 组合参数构成表示矩阵的列

函数作为基张成的函数空间: $\{\Psi_1(\vec{r})=x, \Psi_2(\vec{r})=y, \Psi_3(\vec{r})=z, \Psi_4(\vec{r})=xy, \Psi_5(\vec{r})=yz, \Psi_6(\vec{r})=xz\}$.

以群群变换作用于 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ 上

d 为绕 z 轴转角 $\frac{2}{3}\pi$ $d \cdot \vec{r} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z \end{pmatrix}$

可知 $A(f)$ 的作用 $A(f)\Psi_1(\vec{r}) = \Psi_1(f\vec{r}) = \Psi_1(d\vec{r}) = (-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 + 0z^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy + 0yz + 0xz$

给出 $A(f)$ 的表示矩阵对应 $\Psi_1(\vec{r})$ 这一列的分量为 $-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0$

物理上:

能级为 E 的本征函数 $\psi_n(x)$ 张成的 n 维函数空间对变换 R 对应的量子算符 R 的作用保持不变.

$R\psi_n(x) = \sum_m \psi_m(x) D_{nm}(R)$ 其中 $D_{nm}(R)$ 为 R 在 $\psi_n(x)$ 基下的线性表示.

§3.2 等价表示. 可约表示与么正表示

1° 基本概念

等价表示: 群 G 在表示空间 V 上的一个表示 $A = \{A(g_\alpha)\}$, 设 P 为一个非奇异变换 $\det P \neq 0$

则 $\{P^{-1}A(g_\alpha)P\}$ 也给出 G 的一个表示 $\{P^{-1}A(g_\alpha)P\}$, 与 $\{A(g_\alpha)\}$ 等价 *相似变换

可约表示: 表示空间 V 存在一个对 G 不变的子空间 W ($W \neq V, W \neq \{0\}$), $\forall \vec{y}$ 对 $\forall g_\alpha \in G$ 有 $A(g_\alpha)\vec{y} \in W$

则 A 是可约表示, 矩阵表示生成 $[A(g_\alpha)] = \begin{pmatrix} C_{mm} & N_{m'} \\ 0 & B_{(n-m) \times (n-m)} \end{pmatrix}$ $C_{m'}, B_{m'}$ 构成 G 的表示

(表示空间) [或 每个表示矩阵 $D(g)$ 都能通过同一相似变换 $X^{-1}D(g)X$ 化为同一形式的阶梯矩阵]

直和: 非相子空间 $W, W' \subset V$, st. $\forall \vec{x} \in V$ 可以唯一分解为 $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{y} \in W, \vec{z} \in W'$, 则 $V = W \oplus W'$ 要求 $W \cap W' = \{0\}$

$\Rightarrow$ 完全可约: G 的表示空间 $V = W \oplus W'$ 且 W, W' 是 G 不变的, 表示矩阵可以写为 $\begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & B_{m'} \end{pmatrix}$

表示的直和: $A(g_\alpha) = B(g_\alpha) \oplus C(g_\alpha)$

$\Rightarrow$ 不可约表示: 群的表示 A 表示空间 V 中不存在 G 不变的子空间, 表示矩阵无法变换为 $\begin{pmatrix} C_m & N_{m'} \\ 0 & B_{m'} \end{pmatrix}$ 形式

么正表示 [保内积变换 + 正交归一基]: 由么正变换群或么正矩阵群进行的表示. $A(g_\alpha)^T = A(g_\alpha)^* = A(g_\alpha^{-1})$

2° 重要结论

两个表示等价 $\Leftrightarrow$ 每个元素 (每类选一个) 在两表示中的特征标相等.

两个等价表示的表示空间维数必相等; 引入特征标 $\chi_A(g) = \text{Tr}[A(g)]$ 判判表示等价

表示的等价性 — 表示空间异同 $\Rightarrow$ 基矢的异同 $\Rightarrow$ 表示矩阵的关系.

基矢变换 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)[P]_b$ 下表示矩阵有相似变换 $[A(g_\alpha)]_b = [P^{-1}]_b [A(g_\alpha)]_b [P]_b$

表示的可约性 — 矩阵形式是否具有变换为右上分块矩阵的能力 可约表示中特征标 = 子表示特征标之和

有限群的线性表示等价于么正表示. 两个等价的么正表示一定可以通过么正的相似变换联系.

定理 3.1 有限群的表示可约则完全可约

有限群任何表示都可以化为不等价不可约么正表示的直和

定理 3.2 么正表示可约则完全可约

$$A(g_\alpha) = \sum_p \oplus m_p A^p(g_\alpha)$$

其中重复度 m_p 代表不可约表示 A^p 出现的次数.

§3.3 群代数与正则表示

1° 基本概念

线性代数 [数域 K 上的线性空间 R + 向量乘法 + 满足封闭性、分配律、数乘交换律] * 结合律 $\Rightarrow$ 结合代数

$\Rightarrow$ 群空间: 将群元素线性组合为向量 (组合系数组为群代数 $f_g(g_a)$), 定义加法与数乘, 形成线性空间 V_G .

群代数: 群空间 V_G + 向量乘法 $\forall \vec{x} = \sum \alpha_a g_a, \forall \vec{y} = \sum \beta_b g_b$ 有 $\vec{x}\vec{y} = \sum \alpha_a \beta_b (g_a g_b)$, 构成群代数 R_G

群元素

① 向量(基) ② 线性变换

群 G 中的每个群元 g_i 对应群空间 V_G 中的线性变换 $L(g_i)$, 构成线性变换群 $\{L(g_i)\}$.

左正则表示: 抽象群 G 到线性变换群 $\{L(g_i)\}$ 的同态映射. $\forall \vec{x} \in V_G, L(g_i)\vec{x} = \sum \alpha_j (g_i g_j) \in V_G$.

表示空间为群空间 V_G .

$\hookrightarrow$ 同构映射 $\Rightarrow$ 正则表示是忠实表示. $i=k \rightarrow 0$
 $i \neq k \rightarrow 1$

右正则表示: $G \rightarrow \{R(g_i)\}$ s.t. $R(g_i)\vec{x} = \sum \alpha_j g_j g_i^{-1} \in V_G. = \sum g_k D_{g_k g_i}(g_j)$.

正则表示/正规表示维数为 n (群阶), 表示矩阵的形成取决于群乘法 $L(g_i)g_j = g_i g_j = g_k$ (重排).

每一行/每一列都有一个矩阵元非零(为1)

正则表示的特征标 $\chi(g_i) = \begin{cases} n & g_i = e \\ 0 & g_i \neq e \end{cases}$

2° 重要结论

群空间线性无关的群代数数目等于群的阶数.

除 1 群外, 正则表示都可约.

群乘法表决定正则表示的矩阵形式: g_i 对应的 $D(g_i)$ 矩阵中第 g_j 列里不为零元素所在行

= 乘法表中行 = g_i 列 = g_j 的乘积 $g_k = g_i g_j$ 标记的行

规定正则表示的矩阵形式: g_i 对应的 $D(g_i)$ 矩阵中第 g_j 行里不为零元素所在列

= 乘法表中行 = g_i 列 = g_j 的乘积 $g_k = g_i g_j$ 标记的列

3° 具体实例.

线性空间: 全部 $n \times n$ 复矩阵 + 加法、数乘 + 矩阵乘法 $\Rightarrow$ 线性代数.

群空间与群代数:

G_3 群 = $\{e, d, f\}$. 向量 $\vec{x} = e + 2d + 3f, \vec{y} = 2e + 3d + f$ 相乘

$$\begin{aligned}\text{法1: } \bar{xy} &= \sum_{\alpha, \beta} x_{\alpha} y_{\beta} (g_{\alpha} g_{\beta}) = (e+2d+f)(2e+3d+f) = e(2e+3d+f) + 2d(2e+3d+f) + \\ &= 2e+3d+f + 4d+6f+2e+6f+9e+3d = 13e+10d+13f \quad \text{if } (2e+3d+f)\end{aligned}$$

$$\text{法2: } \bar{xy} = \sum_Y (\bar{x}Y)Yg_Y$$

$$g_Y = e \quad g_X = e \leftrightarrow g_{X^{-1}Y} = e: 2 + g_X = d \leftrightarrow g_{X^{-1}Y} = f: 2 + g_X = f \leftrightarrow g_{X^{-1}Y} = d: 9 = 13e$$

$$g_Y = d \quad g_X = e \leftrightarrow g_{X^{-1}Y} = d: 3 + g_X = d \leftrightarrow g_{X^{-1}Y} = e: 4 + g_X = f \leftrightarrow g_{X^{-1}Y} = f: 3 = 10d$$

$$g_Y = f \quad g_X = e \leftrightarrow g_{X^{-1}Y} = f: 1 + g_X = d \leftrightarrow g_{X^{-1}Y} = d: 6 + g_X = f \leftrightarrow g_{X^{-1}Y} = e: 6 = 13f$$

左正则表示的表示矩阵:

1. $\Sigma_2 = \{e, a\}$ 群元对应群空间 V_{Σ_2} 的线性变换为 $L(e), L(a)$ 出实表示

$$L(e)|e\rangle = ee = 1|e\rangle + 0|a\rangle \quad L(e)|a\rangle = ea = 0|e\rangle + 1|a\rangle \quad \Rightarrow L(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L(a)|e\rangle = ae = 0|e\rangle + 1|a\rangle \quad L(a)|a\rangle = aa = 1|e\rangle + 0|a\rangle \quad \Rightarrow L(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{取 } X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{则 } X \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} X^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

左正则表示可约为 $\{1, -1\}$.

$$2. D_3 \text{ 群} = \{e, d, f, a, b, c\}$$

(行)乘法表 $\rightarrow$ 左正则表示 $L(g_i)$ 的表示矩阵

(列)乘法表 $\rightarrow$ 右正则表示 $R(g_i)$ 的表示矩阵.

左正则表示矩阵有

$$D(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{6 \times 6}$$

$$D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右正则表示矩阵有

$$\bar{D}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{D}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

§2.4 有限群表示理论

研究有限群的不等价不可约表示。

1' 基本概念.

群空间 V_G	$\xrightarrow{\text{向量乘法}}$	群代数 R_G .
群元的线性组合 (加法+数乘)	$\vec{x}\vec{y} = \sum_r (\sum_\alpha x_\alpha y_{\alpha^{-1}r}) g_r$	保证封闭性 $\vec{x}\vec{y} \in V_G$.
维数为 n 内积 $(\vec{x} \vec{y})$.		定义正则表示

$\Downarrow$

$$xy(g_i) = \sum_{j=1}^n x(g_j) y(g_j^{-1}g_i)$$

群函数空间的代数

群函数空间

$\xrightarrow{\text{函数乘法}}$

保证封闭性

群函数 $f(g_i)$ 与群空间中的向量 $\vec{f} = \sum_i f(g_i) g_i$ 一一对应.

群函数的正则表示.

(加法+数乘) 基矢为 $g_1(g_i) = \delta_{1i}, g_2(g_i) = \delta_{2i} \dots$

正则表示为么正表示

内积 $(\vec{x}|\vec{y}) = \frac{1}{n} \sum_i x^*(g_i) y(g_i); (g_i|g_j) = \frac{1}{n} \delta_{ij}$

$$(L(g_\alpha)\vec{x} | L(g_\alpha)\vec{y}) = (\vec{x} | \vec{y})$$

群 G 的一个 s_p 维表示 A^p 分量 $A_{\alpha\beta}^p(g_i)$ 也是群函数, 且正交完备.

维数为 $n = \sum_p s_p^2$

2' 重要结论

定理 3.3 舒尔引理一: 设群 G 在有限维向量空间 V_A 与 V_B 有不可约表示 A 与 B , 若对 $\forall g_\alpha \in G$, 有将 V_A 映入 V_B 的线性变换 M , 满足 $B(g_\alpha)M = MA(g_\alpha)$, 则

1) A 与 B 不等价时, $M=0$ 2) $M \neq 0$ 时, A 与 B 等价 对 G 不变的 零空间.

一反证法证明 A 与 B 不等价时 M 可以非零, 反复利用不可约表示的表示空间 $\rightarrow$ 空间只能是全空间或

定理 3.4 舒尔引理二: 设 A 是群 G 在有限维复空间 V 上的不可约表示. 若 V 上的线性变换 M 满足 $MA(g_\alpha) = A(g_\alpha)M$ 对 $\forall g_\alpha \in G$ 成立, 则 $M = \lambda E$

一 证明 G 不变的空间 $R = \{\vec{y} \in V | M\vec{y} = \lambda_0 \vec{y}\} = V$ 全空间. $\forall \vec{x} \in V$ 都有 $M\vec{x} = \lambda_0 \vec{x}$

定理3.5 有限群在內积空间的每个表示都有等价的么正表示.

— 定义新內积 $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \frac{1}{n} \sum_i (A(g_i) \vec{x} | A(g_i) \vec{y})$, $A(g_i)$ 在新內积下是么正变换

旧內积与新內积下正交子的两组基之间有非奇异线性变换 X .

s.t. $(X^{-1} A(g_i) X \vec{x} | X^{-1} A(g_i) X \vec{y}) = (\vec{x} | \vec{y}) \rightarrow$ 等价线性变换群 $X^{-1} A(g_i) X$ 是一个正群

群空间的矢量 $|x\rangle = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(g_{\alpha}) g_{\alpha}$ 与 群函数 $f(g) = (f(g_{\alpha}), \alpha=1 \dots n)$ 一一对应

群空间基矢 $|g_{\alpha}\rangle = \delta_{\alpha\beta} |g_{\beta}\rangle$ 即群元满足正交归一性 $\langle g_{\alpha} | g_{\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta}$

群空间矢量 $|x\rangle = \sum_i f_i(g_{\alpha}) |g_{\alpha}\rangle$ 与 $|y\rangle = \sum_j f_j(g_{\beta}) |g_{\beta}\rangle$ 內积 表示矩阵元作为群函数 $A_{\mu\nu}^p(g)$

$\langle x | y \rangle = \sum_{\alpha} f_1^*(g_{\alpha}) f_2(g_{\alpha}) \langle g_{\alpha} | g_{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha} f_1^*(g_{\alpha}) f_2(g_{\alpha})$ 群空间中的矢量 $|x\rangle = \sum_{\alpha} A_{\mu\nu}^p(g_{\alpha}) g_{\alpha}$
正交关系判定

定理3.6 设有限群 $G = \{g_{\alpha}\}$ 有维数分别为 $s_1, s_2, \dots, s_p, \dots, s_r, \dots$ 的不等价不可约么正表示 $A^1, A^2, \dots, A^p, \dots, A^r, \dots$

表示矩阵元 $A_{\mu\nu}^p(g_{\alpha})$ 作为群函数, 在域內积的群函数空间中有正交性 (存在表示指标与矩阵的行列指标)

$(A_{\mu\nu}^p | A_{\mu'\nu'}^{p'}) = \frac{1}{s_p} \delta_{pp'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}$ 或 $\sum_i (A_{\mu\nu}^p(g_i))^* A_{\mu'\nu'}^{p'}(g_i) = \frac{n}{s_p} \delta_{pp'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}$ n 为群 G 的阶

— 拟设 s_p 维矩阵 C, D 关系, 取特殊形式 D , 利用舒尔引理二 + 么正表示证明行列指标正交性.

拟设 $s_r \times s_p$ 维矩阵 C, D 关系, 取特殊形式 D' , 利用舒尔引理一证明表示指标正交性.

定理3.7 设 $A_p (p=1 \dots l)$ 是有限群 $G = \{g_{\alpha}\}$ 所有不等价不可约么正表示, 则 A_p 域的群函数 $A_{\mu\nu}^p(g_i)$

在 p 取遍所有不等价不可约么正表示, μ, ν 取遍所有行列时, 在群函数空间是完备的.

— 若 l 个不等价不可约么正表示中矩阵元作为群函数共有 $s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_l^2$ 个, 每行的群函数为基形成右正则表示的

G 不变的子空间 V , 对应 $R(g_j)$ 的表示矩阵正是 A^p 本身 V 对 R_G 的正交补空间 $V^{\perp}$ 与 V 有交, 故 $V = R_G$.

$= \sqrt{s_p} (A_{\mu\nu}^p(g_i) g_i)$ 构成 l 个群函数空间中正交归一的完备基.

Burnside定理: $\sum_p s_p^2 = n$ 且约化正则表示: 右/左正则表示 $= \bigoplus_p s_p A^p$ 取决于行/列的共轭.

正则表示可以分解为 s_p 个不等价不可约表示 A^p 并对表示求直和

§2.5 特征标理论

特征标: 群 G 的一个表示 A 的特征标为 $\{\chi(g_\alpha)\}$, $\chi(g_\alpha) = \text{tr} A(g_\alpha) = \sum_{\mu} A_{\mu\mu}(g_\alpha)$.

- ① 特征标 $\chi(g_\alpha)$ 是一个类函数 — 同一类中的群元特征标相同
- ② 等价表示的特征标相同 ③ 单位元素的特征标为此表示的维度.

定理 2.8 特征标第一正交定理: 有限群不可约表示的特征标满足 遍历群元, 表示间正交

$$(\chi^p | \chi^r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi^p(g_i) \chi^r(g_i) = \delta_{pr}$$

或 $(\chi^p | \chi^r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i \chi^p(K_i) \chi^r(K_i) = \delta_{pr}$ 其中 l 为群 G 中类的个数, n_i 是第 i 个类中元素的个数

对表示 $B = \sum_{p=1}^s m_p A^p$, 其中 A^p 为不可约表示. $(\chi^{A^p} | \chi^{A^p}) = 1$. $(\chi^B | \chi^B) = \sum_{p=1}^s m_p^2 > 1$

内积 $(\chi^{A^p} | \chi^B) = (\chi^{A^p} | \sum_{p=1}^s m_p \chi^{A^p}) = m_p$ 给出其中不可约表示的重数

定理 3.9 有限群的所有不等价不可约表示的特征标在类空间是完备的.

⇒ 类函数空间的维数 = 群中类的个数, 特征标作为基可以展开任一类函数.

群函数有 $f(g_i) = \sum_{p,r=1}^s a_{pr} A_{pr}^p(g_i)$ $A_{pr}^p(g_i)$ 为不等价不可约群表示矩阵元

类函数有 $f(g_i) = \sum_p \left(\frac{1}{g} \sum_{\alpha} a_{p\alpha} \right) \chi^p(g_i)$ $\chi^p(g_i)$ 为不等价不可约群表示的特征标.

有限群的正则表示约化后, 其所有不等价不可约都将出现, 且表示重数等于表示维度 $m_p = S_p$.

一个群的不等价不可约表示个数 = 群中类的个数.

$$\text{特征矩阵 } F_{ri} = \sqrt{\frac{1}{n}} \chi^r(K_i).$$

定理 3.10 特征标第二正交定理 $\frac{n_i}{n} \sum_{p=1}^s \chi^p(K_i) \chi^p(K_j) = \delta_{ij}$ 遍历表示, 类间正交.

⇒ 特征标表: 横轴为有限群的不同类 K_i 及相应类中群元个数 n_i 及 K_i ; 纵轴为群的不等价不可约表示指标 A^p .

表内填入群中类 K_i 在表示 A^p 下的特征标 χ_i 行列间正交.

两个表示等价 ⇔ 特征标相等

特征标表例: n 阶值环群 $C_n: \{a, a^2 \dots a^n = e\}$ Abelian 群 → n 个类 → n 个不等价不可约表示 A_p

$$n = \sum_{p=1}^n S_p^2 \quad \text{每个表示均为一维, 表示(数)满足 } [A(a)]^n = 1 \text{ 有 } n \text{ 个解 } A(a) = \exp[2\pi i \frac{(p-1)}{n}]$$

$$p=1 \dots n$$

G_4	$1\{e\}$	$1\{a\}$	$1\{a^2\}$	$1\{a^3\}$	恒等表示
A^1	1	1	1	1	
A^2	1	i	-1	-i	
A^3	1	-1	1	-1	
A^4	1	-i	-1	i	

表示数

D_3	$1\{e\}$	$2\{d, f\}$	$3\{a, b, c\}$	法1: 物理意义 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D(R) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow D(R)$ 法2: 函数意义 $P_R \psi(x) = \psi(Rx) = \sum_{j=1}^N \psi_j D_{Rj}(R)$
A^1	1	1	1	
A^2	1	1	-1	
A^3	2	-1	0	

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

§2.6 新表示的构成

四群表示的直积

矩阵直积保持原两个矩阵是单位矩阵、对角矩阵与么正矩阵

若 $A^{(1)}$ 与 $A^{(2)}$, $B^{(1)}$ 与 $B^{(2)}$ 分别为同阶矩阵, 则 $(A^{(1)} \otimes B^{(1)})(A^{(2)} \otimes B^{(2)}) = (A^{(1)} A^{(2)}) \otimes (B^{(1)} B^{(2)})$

群表示的直积: 群 G 有两个表示 A 与 B , 作表示矩阵的直积 $C(g_\alpha) = A(g_\alpha) \otimes B(g_\alpha)$, 形成的直积矩阵群

保持群的乘法规则不变 — $\forall g_\alpha, g_\beta \in G$ 有 $C(g_\alpha) C(g_\beta) = C(g_\alpha g_\beta)$

故集为群 G 的一个表示, 特征标为 $\chi^C(g_\alpha) = \chi^A(g_\alpha) \chi^B(g_\alpha)$

例: D_3 群的直积表示 $A^1 \otimes A^3$ $2; 1; 0$ 与 A^3 等价, 不可约

$A^2 \otimes A^3$ $2; -1; 0$ 与 A^3 等价, 不可约

$A^3 \otimes A^3$ $4; 1; 0$ 可约化为 $A^1 \otimes A^2 \otimes A^3$

直积群群的表示

直积群 $[G = G_1 \otimes G_2]$ G_1 与 G_2 乘法互易, $g_{up} = g_{1u} g_{2p}$, G_1 与 G_2 都是 G 的不变子群

直积群的表示: 群 G 为 G_1 与 G_2 的直积, G_1, G_2 分别有表示 A 与 B , 由直积分解规则

$C(g_1 g_2) = A(g_1) \otimes B(g_2)$ 构成群 G 的表示

不可约群表示的直积形成的新表示可能可约; 直积群由不可约表示构成的表示也不可约

因群表示在子群上的缩小.

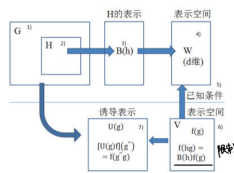
群 G 的一个表示 $A(g) \supset G$ 的子群 H 的表示 $A(h)$ — G 的表示 A 到其子群 H 的缩小 $A|_H$

A 是 G 的不可约表示, 缩小 $A|_H$ 不定 H 的不可约表示. e.g. P_3 的表示 $A^2 \rightarrow H = \{e, d, f\}$

因诱导表示 — 从群 G 的子群 H 的表示 $B(h)$ 构造 G 的表示

表示 B 的表示空间为 W

定义表示 = 定义与 G 同态的线性变换群.



1° 构造表示空间 V $f \in V$ s.t. $\forall g_i \in G \mapsto f(g_i) \in W$

+ 限制条件 $\forall g \in G, h \in H$ 有 $B(h)$ 为 W 空间上的线性变换, $f(g) \in W$

s.t. $f(gh) = B(h)f(g) \in W$

2° 群元 $g \in G$ 对应的线性变换 $U(g)$

$f \in V \xrightarrow{U(g)} [U(g)f] \in V$ s.t. $g'' \in G$ 有 $[U(g)f](g'') = f(g''g) \in W$

满足 $[U(g)f](hg'') = f(hg''g) = B(h)f(g''g) = B(h)[U(g)f](g'')$.

3° 线性变换 f 保持群 G 乘法规则, 构成线性变换群

+ 同态关系 $\forall g, g', g'' \in G, \forall f \in V$ 有 $[U(g)U(g')f](g'') = f(g''g'g) = [U(g'g)f](g'')$.

$\Rightarrow \{U(g)\}$ 是 G 的一个诱导表示 $_H \bigcup^B$

4° 产生诱导表示的矩阵

① 函数空间 V 的维数 = 群元 g_i 的 n 个选择 $\times W$ 空间中的向量 f 是 d 维

$\div$ 限制 f : 陪集分解 $G = \{Hg_1 \cdots Hg_l\}$, 其中 $l = \frac{n}{m}$, m 为 H 的群元个数

仅需知道分解中 g_i 对应的 $f(g_i) \Rightarrow f(hg_i)$

故维数为 $\frac{n}{m} d = l \times d$

② 寻找 V 中的线性无关函数 (基) 形如 $e_{ij}(g_k) = \delta_{jk} \bar{e}_i$ $i=1 \cdots d$ 为 W 空间指标 $j, k=1 \cdots l$

③ 表示矩阵形式

$$\forall g \in G \quad U(g) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(g_1 g g_1^{-1}) & \tilde{B}(g_1 g g_2^{-1}) & \cdots & \tilde{B}(g_1 g g_l^{-1}) \\ \tilde{B}(g_2 g g_1^{-1}) & \tilde{B}(g_2 g g_2^{-1}) & \cdots & \tilde{B}(g_2 g g_l^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{B}(g_l g g_1^{-1}) & \tilde{B}(g_l g g_2^{-1}) & \cdots & \tilde{B}(g_l g g_l^{-1}) \end{pmatrix} \quad \text{其中 } \tilde{B}(g_m g g_j^{-1}) = \begin{cases} B(g_m g g_j^{-1}) & g_m g g_j^{-1} \in H \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

例: $D_3 = \{e, d, f, a, b, c\}$ 中有子群 $H = \{e, d, f\}$ 表示为 $B(e)=1, B(d)=\varepsilon = \exp[\frac{2\pi i}{3}] B(f)=\varepsilon^2$

$\Rightarrow$ 陪集分解 $G = \{Hg_1, Hg_2\}$

$g_1=e \quad g_2=a$

特征标

$$U^B(e) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(e e e^{-1}) & \tilde{B}(e e a^{-1}) \\ \tilde{B}(a e e^{-1}) & \tilde{B}(a e a^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(e) & 0 \\ 0 & B(e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2

$$U^B(d) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(d e d^{-1}) & \tilde{B}(d e a^{-1}) \\ \tilde{B}(a d e^{-1}) & \tilde{B}(a d a^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(d) & 0 \\ 0 & B(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

-1

$$U^B(f) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(f e f^{-1}) & \tilde{B}(f e a^{-1}) \\ \tilde{B}(a f e^{-1}) & \tilde{B}(a f a^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(f) & 0 \\ 0 & B(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$U^B(a) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(a e a^{-1}) & \tilde{B}(a e b a^{-1}) \\ \tilde{B}(b a e^{-1}) & \tilde{B}(b a a^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(e) \\ B(e) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U^B(b) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(b e b^{-1}) & \tilde{B}(b e a^{-1}) \\ \tilde{B}(a b e^{-1}) & \tilde{B}(a b a^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(f) \\ B(d) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

0

$$U^B(c) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(c e c^{-1}) & \tilde{B}(c e a^{-1}) \\ \tilde{B}(a c e^{-1}) & \tilde{B}(a c a^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(d) \\ B(f) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix}$$

[不可约表示]

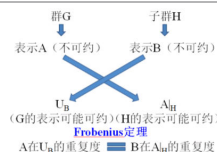
④ 诱导表示特征标 $\chi^U(g) = \frac{1}{m} \sum_{t \in G} \text{tr } \tilde{B}(t g t^{-1})$

因 Frobenius 定理

G 的不可约表示 A 在由 H 的不可约表示 B 所诱导出的 G 的表示 U 中的重数

= H 的不可约表示 B 在 G 的不可约表示 A 对 H 的缩 $A|_H$ 中的重数

$$(\chi^A | \chi^U) = (\chi^A | \chi^{A|_H})$$



例: D_3 中 H 的不可约表示 B 的符号表示为 A D_3 的不可约表示 A^1, A^2, A^3 在其上的重复度为 $0, 0, 1$.

A^1, A^2 在 H 上的缩小 $A|_H$ 为 $\tilde{A}^1|_H(e) = \tilde{A}^1|_H(d) = \tilde{A}^1|_H(f) = 1$. B 在 $A|_H$ 中的重复度为 0

A^3 在 H 上的缩小为 $A^3|_H(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3|_H(d) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ $A^3|_H(f) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$

B 在 $A^3|_H$ 上的重复度 $(\chi^B | \chi^{A^3|_H}) = \frac{1}{m} (\chi^{B^*}(e) \chi^{A^3|_H}(e) + \chi^{B^*}(d) \chi^{A^3|_H}(d) + \chi^{B^*}(f) \chi^{A^3|_H}(f))$

$$\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right). \quad = \frac{1}{3} (1 \times 2 + \varepsilon(\varepsilon + \varepsilon^2) + \varepsilon^2(\varepsilon^2 + \varepsilon)) = 1$$

第四章 李群李代数 Lie Group & Lie Algebra.

§4.1 旋转与李代数记号.

• 二维转动 $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 用连续参数标记群

满足Abel性 $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1)$

模长不变 $|\vec{r}'| = |\vec{r}| \Leftrightarrow$ 内积不变 $\vec{p}' = R\vec{p}, \vec{q}' = R\vec{q}$ 有 $\vec{p}' \cdot \vec{q}' = \vec{p} \cdot \vec{q}$

约定 $\vec{p} \cdot \vec{q} = p^T q = \begin{pmatrix} x_p & y_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_q & y_q \end{pmatrix} = x_p x_q + y_p y_q$

$\Rightarrow$ 要求 $R^T(\theta)R(\theta) = I$ 即二维实正交矩阵 $R(\theta)$ 构成 $O(2)$ 群

• 行列式 $\det R = 1$ 或 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 反射操作及 $P R(\theta)$ 有 $\det P = -1$

$\Rightarrow$ N维转动 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \vec{x}' = R \vec{x} \quad |\vec{x}'| = |\vec{x}| \Rightarrow R^T R = I_{n \times n}$

$\det R = 1 \quad O(N) \rightarrow SO(N)$. 特殊正交群.

• Lie: $R(\theta) = I + A + O(\theta^2)$ 矩阵的指数Taylor展开. 在恒等变换 I 处 θ 为无穷小参数

由正交性 $I = R^T(\theta)R(\theta) \approx (I + A^T)(I + A) \approx I + A + A^T + \dots$ 有 $A = -A^T$ 反对称.

定义 $A = J_{\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad R(\theta) \approx I + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J$ 恒等附近的微小转动.

$R(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} [R(\frac{\theta}{N})]^N = \lim_{N \rightarrow \infty} (I + J \frac{\theta}{N})^N = \exp(\theta J). \quad (J^2 = -I)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \frac{J^n}{n!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!}}_{\cos \theta} I + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} J}_{\sin \theta} \quad \begin{matrix} \text{恒等附近展开, 只研究生成元 } A. \\ \hookrightarrow \det R = 1 \text{ 自动满足} \end{matrix}$

• $SO(3) \quad R = I + A + \dots \quad A = -A^T$ 为三维反对称矩阵 $\propto J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad yz$ 平面.

$N=2 \quad 1\uparrow \quad N=3 \quad 3\uparrow \quad$ 一般生成元 $\begin{cases} J_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad xz \text{ 平面} \\ J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad xy \text{ 平面} \end{cases}$

$A = \theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z = i(\theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z) \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad xy \text{ 平面}$

物理意义要求生成元厄米, 则 $J_{x,y,z} = -i J_{x,y,z} \quad \text{s.t.} \quad J_{x,y,z}^\dagger = J_{x,y,z}$

对于有限大的群元 $R(\theta) = \exp(i \sum_{j=x,y,z} \theta_j J_j) = \exp(i \vec{\theta} \cdot \vec{J})$

• 生成元个数 $\frac{1}{2}N(N-1)$ for $SO(N)/O(N)$

李群 $\rightarrow$ 李代数

$N^2 - \frac{N(NH)}{2}$ 独立参数与行列式个数为1无冗余选取分支.

$I + A + \dots \quad A.$

N^2 for $U(N)$. N^2-1 for $SU(N)$.

考察 $RR'R^{-1}$ 的小展开 [共轭/非对易].

$$RR'R^{-1} \simeq (I+A)R'(I-A) = R' + AR' - RA \neq R' \quad \text{非Abelian性.}$$

$$R' \simeq I+B \quad \text{对易} [A, B] \equiv AB - BA.$$

$$[A, B] = - \sum_{j,k=1,2,3} \theta_j \theta_k [J_j, J_k]$$

闭合性 $[A, B]^T = -[A, B] \rightarrow$ 代数 $\rightarrow$ 乘法为李括号 (对易) J_i 乘 $J_j \equiv [J_i, J_j] \equiv i C_{ijk} J_k$.

也是 3×3 反对称矩阵. C_{ijk} 为结构常数, ij 反对称.

$$SO(3) \quad J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} [J_x, J_y] = i J_z \\ [J_y, J_z] = i J_x \\ [J_z, J_x] = i J_y \end{cases} \quad [J_i, J_j] = i C_{ijk} J_k. \quad \text{其中 } C_{ijk} \text{ 全反对称 } C_{123} = +1.$$

表示 $\vec{J} = -i \vec{r} \otimes \vec{\nabla} \quad J_z = -i(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$

$$g(\theta_1, \theta_2, \dots) |_{\theta=0} = I.$$

$$\Rightarrow g(\theta_1, \theta_2, \dots) = I + A + \dots = i \sum_a \theta_a T_a$$

$$g_1 g_2^{-1} \sim g_1 + [A, B].$$

$$\Rightarrow [T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad \text{李代数的表示} \rightarrow g(\theta) = e^{i \theta_a T_a} \quad \text{李群表示.}$$

$$\text{有 } e^A e^B = e^C \quad C = A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \dots \quad [\text{Baker-Campbell-Hausdorff formula}].$$

$SO(N)$ 李代数

$$R(\theta_{ij}) \simeq I + i \sum_{m,n} \theta_{mn} T_{(mn)} \quad \underbrace{(T_{(mn)})^{ij}}_{\frac{1}{2} N(N-1)} = -i (\delta^{mi} \delta^{nj} - \delta^{mj} \delta^{ni})$$

具体矩阵元 ij

$$[J_{(mn)}, J_{(pq)}] = i (\delta_{mp} J_{(nq)} + \delta_{nq} J_{(mp)} - \delta_{mq} J_{(np)} - \delta_{np} J_{(mq)})$$

$$[J_{23}, J_{31}] = -i J_{21} = i J_{12}$$

§4.2 张量与转动群 $SO(N)$ 的表示

$SO(N)$ 的表示 — 张量.

$$V^i \rightarrow V'^i = R^{ij} V^j \quad N \text{ 维定义表示 / 基础表示 / 矢量表示.}$$

$$T^{ij} \rightarrow T'^{ij} = R^{ik} R^{jl} T^{kl} \quad 9 \text{ 维可约表示.}$$

$$T^{i_1 \dots i_n} \rightarrow T'^{i_1 \dots i_n} = R^{i_1 j_1} R^{i_2 j_2} \dots R^{i_n j_n} T^{j_1 \dots j_n}$$

做两次转动 $T \xrightarrow{R_1} T' \xrightarrow{R_2} T'' = (R_2 R_1)^{im} (R_2 R_1)^{jn} T^{mn}$ 任意 m 阶张量都构成 $SO(3)$ 表示.

$$N=3 \quad A^{ij} \equiv T^{ij} - T^{ji} \quad \text{反对称张量} \quad 3 \text{ 维表示} \quad A^{ij} = R^{ik} R^{jl} A^{kl} \quad \frac{1}{2} N(N-1).$$

$$S^{ij} = T^{ij} + T^{ji} \quad \text{对称张量} \quad 6 \text{ 维表示} \quad S^{ij} = R^{ik} R^{jl} S^{kl} \quad \frac{1}{2} N(N+1) - 1$$

$$\hookrightarrow S^{ii} = S^{11} + S^{22} + \dots + S^{NN} \quad 1 \text{ 维表示} \quad S^{ii} = R^{ik} R^{il} S^{kl} = \delta^{kl} S^{kl} = S^{kk} \quad \text{恒等表示.}$$

对称无迹张量 $\tilde{S}^{ij} \equiv S^{ij} - \delta^{ij} (S^{kk}/N) \quad (R^{-1})^{ki} \quad \text{五维不可约表示 } \tilde{S}^{11}, \tilde{S}^{22}, \tilde{S}^{33}, \tilde{S}^{12}, \tilde{S}^{23}$

• 定义对偶张量 $\varepsilon^{ij \dots n} A^{ij} \equiv B^{k \dots n}$. 二阶反对称张量 $\rightarrow (N-2)$ 阶反对称张量.

$$\delta^{ij} S^{ij \dots n} \equiv S^{ik \dots n} \quad N \text{ 阶张量对 2 个指标缩并 } \rightarrow (N-2) \text{ 阶张量.}$$

• $SO(3)$ 特殊性 $\rightarrow$ 全对称无迹

$$T^{ij} = A^{ij} + \underline{S^{ij}} + S^{ii} \quad B^k = \varepsilon^{ijk} A^{ij} \quad \text{对偶于矢量表示.}$$

$$T^{ijk} \dots \quad (\text{任意高阶表示}) \Rightarrow \text{对称无迹部分. 维数 } d_j = \frac{1}{2}(j+1)(j+2) - \frac{1}{2}j(j-1) = 2j+1.$$

• $SO(2)$ 所有不可约表示都是 2 维的. $D^{j|0} = \begin{pmatrix} \cos j\theta & \sin j\theta \\ -\sin j\theta & \cos j\theta \end{pmatrix}$.

伴随表示.

$$J_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [J_a, J_b] = i \varepsilon_{abc} J_c$$

$$(J_a)_{bc} = -i \varepsilon_{abc} \quad [\text{是由于 } N=3 = \frac{N(N-1)}{2}]. \Rightarrow (T_a)_{bc} = -i f_{abc}.$$

$$\boxplus [T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \Rightarrow f^{abg} f^{dgc} + f^{bcg} f^{dag} + f^{cag} f^{dbg} = 0 \quad \text{Bianchi 恒等式}$$

$n \times n$ 实矩阵 $R^T R = I + \det R = 1 \Rightarrow SO(N)$ 独立参数 $N^2 - \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N(N-1)}{2} \uparrow$

群元 $R \sim I + A \Rightarrow A = -A^T$ 记 $A = i\theta_a J_a$ θ_a 为独立参数, J_a 为生成元

选基进行表示 $(J_{mn})_{ij} = i(\delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm})$

$m < n$ $N=3$ $mn = 12, 23, 31$

$\Rightarrow$ 张量表示

$T^{ij} \sim V^i V^j$ $T^{i_1 \dots i_n} \sim V^{i_1} V^{i_2} \dots V^{i_n}$

$V^i \rightarrow V'^i = R^{ij} V^j$ 3维表示

$T^{ij} \rightarrow T'^{ij} = R^{ik} R^{jl} T^{kl}$ 9维表示 ($N=3$) $\Rightarrow$ 高阶张量表示 T^{ijk} 一般考虑物因

反对称 $A^{ij} = T^{ij} - T^{ji}$ 但对于 $SO(3)$: $\epsilon_{ijk} A^{ij} = B_k$

对称迹 $\tilde{S}^{ij} = T^{ij} + T^{ji} - S^k S^k \delta^{ij}$

迹 $S^{ii} = S^1 + \dots + S^{NN}$ $S^{i_1 \dots i_n}$ 全对称无迹 $\rightarrow (2^n - 1)$ 维.

§4.3 $SO(3)$ 群的 Lie 代数与升降算符.

• $SO(3)$ Lie 代数的表示

$$① [J_x, J_y] = iJ_z \quad [J_y, J_z] = iJ_x \quad [J_z, J_x] = iJ_y \quad [J_x, J_x] = [J_y, J_y] = [J_z, J_z] = 0$$

② 3维定义表示 (向量空间) 3×3 反对称矩阵 J_x, J_y, J_z 生成元.

③ 给定非负整数 j , 有一个 $(2j+1)$ 维转动群的不可约表示.

• 升降算符

定义 $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ $[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$ $[J_+, J_-] = 2J_z$. 且 $(J_+)^T = J_-$

考虑 J_z 的本征值为 m 的本征态 $|m\rangle$: $J_z |m\rangle = m |m\rangle$ J_z 厄米 $\Rightarrow m$ 实数

$$J_z(J_+|m\rangle) = (m+1)(J_+|m\rangle) \propto |m+1\rangle \quad \text{设 } J_+|m\rangle = c_{m+1}|m+1\rangle$$

$$J_z(J_-|m\rangle) = (m-1)(J_-|m\rangle) \propto |m-1\rangle \quad \text{设 } J_-|m\rangle = b_{m-1}|m-1\rangle$$

$$C_{m+1}^* = \langle m|(J_+)^{\dagger}|m-1\rangle = \langle m|J_-|m+1\rangle = \langle m|b_m|m\rangle = b_m \Rightarrow b_{m+1} = C_m^*$$

由于要求表示是有限维的 约定 $j = m_{\max}$ 有 $J_+|j\rangle = 0$

$$\text{由 } 0 = \langle j|J_-J_+|j\rangle = \langle j|J_+J_- - 2J_z|j\rangle = |C_j|^2 - 2j \Rightarrow |C_j|^2 = 2j$$

$$\text{由 } \langle m|[J_+, J_-]|m\rangle = \langle m|(J_+J_- - J_-J_+)|m\rangle = |C_m|^2 - |C_{m-1}|^2 = \langle m|2J_z|m\rangle = 2m$$

$$\Rightarrow |C_m|^2 = |C_{m+1}|^2 + 2m$$

$$\text{可知 } |C_{j-s}|^2 = 2[(s+1)j - \sum_{i=1}^s i] = (s+1)(2j-s) \quad s=2j \text{ 时 } |C_{j-s}|^2 = 0$$

$$\text{即 } J_-|j\rangle = C_{j-1}^*|j-1\rangle = 0 \quad m_{\min} = -j$$

$$\Rightarrow SO(3) \text{ 群的 } (2j+1) \text{ 维表示空间 } |j\rangle, |j+1\rangle, \dots, |j\rangle$$

$$s=j-m \text{ 时 } |C_m|^2 = (j+m)(j+1-m) \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

$$\text{升算符 } J_+|m\rangle = C_{m+1}|m+1\rangle = \sqrt{(j+1-m)(j-m)}|m+1\rangle \quad J_+|j\rangle = 0$$

$$\text{降算符 } J_-|m\rangle = C_m^*|m-1\rangle = \sqrt{(j+1-m)(j+m)}|m-1\rangle \quad J_-|j\rangle = 0$$

$$\text{e.g. } \textcircled{1} j=\frac{1}{2} \quad J_+|-\frac{1}{2}\rangle = |+\frac{1}{2}\rangle \quad J_-|+\frac{1}{2}\rangle = |-\frac{1}{2}\rangle \quad [\text{旋量表示}]$$

$$\textcircled{2} j=1 \quad J_+|1\rangle = \sqrt{2}|0\rangle \quad J_+|0\rangle = \sqrt{2}|1\rangle \quad J_-|1\rangle = \sqrt{2}|0\rangle \quad J_-|0\rangle = \sqrt{2}|1\rangle$$

$$\textcircled{3} j=2 \quad \dots$$

• $SO(3)$ 的表示直积

$$n \text{ 维对称张量表示 } S^j \textcircled{1} 3 \text{ 维矢量表示 } T^k \Rightarrow P^{jk} = S^j T^k \quad \begin{matrix} j=1, 2, 12, 23, 31 \\ k=1, 2, 3 \end{matrix} \quad 15 \text{ 个分量}$$

$$\text{分解: 对称张量 } U^{ijk} = S^j T^k + S^k T^j + S^i T^j \quad \left. \begin{array}{l} \text{对称无迹 } \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) - 3 = \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 22 & 23 \\ 33 & 31 \end{vmatrix} = 123 \\ \text{迹 } U^k = \delta^{ij} U^{ijk} = 2 S^i T^i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{对称无迹 } \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) - 3 = \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 22 & 23 \\ 33 & 31 \end{vmatrix} = 123 \\ \tilde{U}^{ijk} = U^{ijk} - \frac{1}{3}(\delta^{ij} U^k + \delta^{jk} U^i + \delta^{ki} U^j) \end{array}$$

$$\text{反对称张量 } V^{il} = S^i T^k \epsilon^{jkl} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{对称部分 } W^{il} = V^{il} + V^{li} \quad \text{迹 } \frac{1}{2}n(n+1) - 1 = 3d \\ \text{反对称部分 } X^{il} = V^{il} - V^{li} \quad 3d \end{array} \right. \quad 3 \times 3 - 1 = 8$$

$$\text{又偶于矢量 } \frac{1}{2} X^{il} \epsilon^{mkl} = S^m T^i$$

$$j+1, j+1 \quad j, j, j+1, j+1, j+1, j+1, j+1, j+1$$

$$5 \oplus 3 = 7 \oplus 5 \oplus 3 \quad \text{另有 } 2 \oplus 1 = 3 \oplus 2 \oplus 1$$

推广至两个全对称无迹张量直乘 $S^{i_1 \dots i_j} \otimes T^{k_1 \dots k_j}$ 作对称无迹化得 $(j+j')$ 不可约表示

$$j \otimes j' = (j+j') \oplus (j+j'-1) \oplus \dots \oplus (|j-j'|+1) \oplus |j-j'|$$

两例表示维数一致 $\sum_{i=j'}^{j'} (2k+1) = (2j+1)(2j'+1)$

• Casimir 算符

对于 $SO(3)$ 标记不可约表示的方式: 张量指标数 j 或表示维数 $2j+1$.

$$j \text{ or } 2j+1 \quad s\text{-wave } 0/1 \quad p\text{-wave } 1/3 \quad d\text{-wave } 2/5 \quad f\text{-wave } 3/7$$

Casimir 算符 $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ 与所有生成元对易 $[J_i, \vec{J}^2] = 0$ 且 $[J_z, \vec{J}^2] = 0$

作用于本征态 $\vec{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle$ 记作 $\vec{J}^2 = j(j+1)$ 标记表示

• 勒让德多项式与球谐函数 $\Leftrightarrow$ 张量表示 L 为整数

$$= -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

轨道角动量 $J_i \rightarrow L_i$ $L_x = i(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z})$ $L_y = i(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x})$ $L_z = i(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y})$

满足 $SO(3)$ Lie 代数 $[L_x, L_y] = iL_z$ $[L_y, L_z] = iL_x$ $[L_z, L_x] = iL_y$

$$L^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = N_l^m e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta)$$

$$L_z Y_l^m(\theta, \varphi) = m Y_l^m(\theta, \varphi)$$

连带勒让德多项式

定义 $L_{\pm} = e^{\pm i\varphi} (i \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \pm \frac{\partial}{\partial \varphi})$

$\Rightarrow$ Casimir 不变量 $\vec{L}^2 = \frac{1}{2}(L_+ L_- + L_- L_+) + L_z^2 = -[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}]$

张量(矢量)与勒让德多项式之间的关系: 球坐标下的单位矢量 V^i $m=0$

$$V^3 = \cos\theta = P_1(\cos\theta)$$

对称无迹 $T^{ij} = V^i V^j - \frac{1}{3} \delta^{ij}$ $T^{33} = \cos^2\theta - \frac{1}{3} = P_2(\cos\theta)$

$$T^{ijk} = V^i V^j V^k - \frac{1}{5} (\delta^{ij} V^k + \delta^{jk} V^i + \delta^{ki} V^j) \quad T^{333} = \cos^3\theta - \frac{3}{5} \cos\theta = P_3(\cos\theta)$$

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi | l, m \rangle$$

§4.4 角动量与 Clebsch-Gordan 分解

· 角动量叠加

量子力学角动量算符 L_i 满足 $SO(3)$ Lie 代数 $[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$.

$$\text{共同本征态 } L^2 |l, m\rangle = \hbar l(l+1) |l, m\rangle; \quad L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$$

考虑两个 $SO(3)$ 群的不可约表示 j, j' , 分别有两组基 $|j, m\rangle$ $m = -j, -j+1, \dots, j$; $|j', m'\rangle$ $m' = -j', -j'+1, \dots, j'$

直接 $|j, m\rangle \otimes |j', m'\rangle$ 构成一个 $SO(3)$ 的 $(2j+1)(2j'+1)$ 维表示

$$\text{在绕 } z \text{ 轴的大角转动下 } |j, m\rangle \otimes |j', m'\rangle \xrightarrow{R} R|j, m\rangle \otimes R|j', m'\rangle \simeq (1 + i\theta(m+m')) |j, m\rangle \otimes |j', m'\rangle.$$

$$\text{即 } J_z (|j, m\rangle \otimes |j', m'\rangle) = (m+m') |j, m\rangle \otimes |j', m'\rangle$$

$\Rightarrow |j, j', m, m'\rangle$ 是 J_z 本征值为 $m+m'$ 的本征态.

· C-G 分解 $|J, M\rangle$ 用 $|j, m\rangle$ 线性表示

e.g. (A) $j = \frac{1}{2}, j' = \frac{1}{2}$ $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m, m'\rangle$ 有 $(2 \times \frac{1}{2} + 1)(2 \times \frac{1}{2} + 1) = 4$ 种可能 $\Rightarrow |J, M\rangle$ 表示: $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$

$$\Rightarrow |1, 1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle; \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle); \quad |1, -1\rangle = |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

$$\text{e.g. (B) } j=1, j'=1 \quad 1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle)$$

$$\Rightarrow |2, 2\rangle = |1, 1\rangle \quad |2, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle + |1, 0\rangle) \quad |2, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|-1, 1\rangle + 2|0, 0\rangle + |1, -1\rangle).$$

$$|2, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, -1\rangle + |-1, 0\rangle) \quad |2, -2\rangle = |-1, -1\rangle$$

$$|1, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle - |1, 0\rangle) \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1, 1\rangle - |1, -1\rangle) \quad |1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1, 0\rangle - |0, -1\rangle).$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1, 1\rangle - |0, 0\rangle + |1, -1\rangle)$$

· C-G 系数 可约表示的直接表示分解为不可约表示的直接和.

$$|J, M\rangle = \sum_{m=-j}^j \sum_{m'=-j'}^{j'} |j, j', m, m'\rangle \langle j, j', m, m' | J, M \rangle.$$

$$\text{完备性 } \sum_{m=-j}^j \sum_{m'=-j'}^{j'} |j, j', m, m'\rangle \langle j, j', m, m'| = I.$$

C-G系数 $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle$ 的计算 $J = |j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2$ $M = m_1 + m_2$

(1) 以 $|s=1, m=\pm 1, 0\rangle, |s=0, m=0\rangle$ 与 $|+, +\rangle, |+, -\rangle, |- , +\rangle, |- , -\rangle$ 为例

$$|s=1, m=1\rangle = |+, +\rangle \quad \text{应用降算符 } S_- \equiv S_{1-} + S_{2-} = (S_{1x} - iS_{1y}) + (S_{2x} - iS_{2y})$$

$$S_- |s=1, m=1\rangle = (S_{1-} + S_{2-}) |+, +\rangle \quad \text{由 } J_- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1)(j-m)(j-m-1)} |j, m-1\rangle$$

$$\sqrt{(1+1)(1-1+1)} |s=1, m=0\rangle = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1)} |-, +\rangle + \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1)} |+, -\rangle$$

$$|s=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-, +\rangle + |+, -\rangle)$$

$$\Rightarrow |s=1, m=-1\rangle = |-, -\rangle$$

$$\Rightarrow \text{表象基矢之间的正交性要求 } |s=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, -\rangle - |-, +\rangle)$$

(2) 一般角动量耦合中的CG系数递推关系

$$J_{\pm} |j_1 j_2; j m\rangle = (J_{1\pm} + J_{2\pm}) \sum_{m_1} \sum_{m_2} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j j_{\pm} j m\rangle \quad m_1 \rightarrow m_1', \quad m_2 \rightarrow m_2'$$

$$\text{左} = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j_1 j_2; j, m \pm 1\rangle \quad \langle j_1 j_2; m_1' m_2' | j j_{\pm} j m\rangle$$

$$\text{右} = \sum_{m_1'} \sum_{m_2'} \left(\sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} |j_1 j_2; m_1' \pm 1, m_2'\rangle + \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)} |j_1 j_2; m_1', m_2' \pm 1\rangle \right)$$

$$\text{作用 } \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | \quad \text{对第一项要求 } m_1 = m_1' \pm 1 \quad m_2 = m_2' \quad \text{对第二项要求 } m_1 = m_1' \quad m_2 = m_2' \pm 1$$

$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j j_{\pm} j, m \pm 1\rangle = \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j j_{\pm} j m\rangle + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j j_{\pm} j m\rangle$$

§4.5 张量与特殊么正群 $SU(N)$ 的表示

• $U(N)$ 群 $U^\dagger U = I$ 其中 U 为 $N \times N$ 复矩阵

$SU(N)$ 群作为 $U(N)$ 的子群 $\det U = 1$ [忽略相因子 $e^{i\alpha}$].

$U(N)$ 包含两个子群 $\left\{ \begin{array}{l} U(1) = \{ e^{i\varphi} I \mid \varphi \in [0, 2\pi) \} \\ SU(N) \quad (u_2 u_1)^\dagger (u_2 u_1) = U_1^\dagger U_2^\dagger U_2 U_1 = U_1^\dagger U_1 = I \end{array} \right.$

么正变换保内积不变 $\int \psi^\dagger \psi = \int \psi^\dagger U^\dagger U \psi = \int \psi^\dagger \psi$

即保模长不变 $\psi^\dagger \psi = |\psi|^2$

• $SU(N)$ 的 Lie 代数

无穷小展开 $U \simeq I + iH \Rightarrow U = e^{iH}$

$U^\dagger U = (I - iH^\dagger)(I + iH) \simeq I + i(H - H^\dagger) = I \Rightarrow H^\dagger = H$ 厄米矩阵

$\det U = e^{i \text{tr} H} = 1 \Rightarrow \text{tr} H = 0$ 无迹.

$SU(N)$ 群的生成元是 $N^2 - 1$ 个厄米无迹的复矩阵 $T_a \quad H = \theta_a T_a$.

• 讨论 $SU(2), SU(3)$

厄米条件 $H^\dagger = H = \begin{pmatrix} u & w \\ \bar{z} & v \end{pmatrix}$

$N=2 \quad H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & -\theta_3 \end{pmatrix} \quad \theta_1, \theta_2, \theta_3 \text{ 为三个任意实数}$

二维厄米无迹矩阵为 Pauli 矩阵 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 3 个生成元

$H = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{2} \theta_a \sigma_a \Rightarrow$ 么正矩阵 $U = e^{i \theta_a \sigma_a / 2} \quad \sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} I + i \epsilon_{abc} \sigma_c$

$N=3 \quad [\sigma_a, \sigma_b] = 2i \epsilon_{abc} \sigma_c$

三维厄米无迹矩阵为 Gell-Mann 矩阵 8 个生成元

$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$N=4 \quad 15$ 个生成元

normalization $\text{tr} \sigma_a \sigma_b = 2 \delta_{ab} \quad \text{tr} \lambda_a \lambda_b = 2 \delta_{ab}$

N $N-1 + 2 \times \frac{1}{2} N(N-1) = N^2 - 1$ 个线性独立的厄米无迹矩阵作为生成元.

• $SU(N)$ Lie代数中的结构常数

群无穷小变换 $U_1 \simeq I + A$ $U_2 \simeq I + B$ $A = \sum_a i \theta^a T^a$ $B = \sum_b i \theta^b T^b$

$$U_2^{-1} U_1 U_2 \simeq (I - B)(I + A)(I + B) = I + A + [A, B]$$

$$[A, B] = \sum_{ab} \theta^a \theta^b [T^a, T^b] \quad \text{厄米矩阵的对易子是厄米且无迹的} \quad [H, K]^{\dagger} = -[H, K] \quad \text{Tr}[H, K] = 0$$

$SU(N)$ Lie代数 $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$ 实数 f^{abc} 为全反对称的结构常数

f^{abc} 随 abc 取值不同而不同

• $SU(N)$ 群的伴随表示.

由无迹张量 φ_i 定义, 维数为 $N^2 - 1$ $\Rightarrow (T^a)^{bc} = -i f^{abc}$

§4.6 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 的覆盖关系.

• $SU(2)$ 同构同构于 $SO(3)$. / $SU(2) \rightarrow SO(3)$ $2 \rightarrow 1$ 映射 (半角)

任一厄米无迹矩阵 $X = x_1 \sigma_1 + y_2 \sigma_2 + z_3 \sigma_3 = \vec{x} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$ $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\det X = -z^2 - x^2 - y^2 = -\vec{x}^2 \quad \text{由 } \vec{x} \text{ 的长度决定}$$

任一么正矩阵 $U \in SU(2)$ 可以有 $X' = U^{\dagger} X U$ 也是厄米无迹的.

$$(X')^{\dagger} = (U^{\dagger} X U)^{\dagger} = U^{\dagger} X^{\dagger} U = U^{\dagger} X U = X'$$

$$\text{tr } X' = \text{tr}(U^{\dagger} X U) = \text{tr}(X U U^{\dagger}) = \text{tr } X = 0 \quad \det X' = \det X = -\vec{x}'^2 = -\vec{x}^2$$

故 $X' = \vec{x}' \cdot \vec{\sigma}$ $\vec{x}'$ 与 $\vec{x}$ 两者线性相关, 且长度相等. $\Rightarrow \vec{x}' = R \vec{x}$ $R \in SO(3)$.

$$SU(2) \rightarrow SO(3)$$

$$f: \pm U \mapsto R \quad 2 \rightarrow 1 \quad f(U) = f(-U) = R$$

$$U^\dagger X U = X' \text{ 与 } X' = (-U)^\dagger X (-U) = U^\dagger X U \text{ 都对应于 } \vec{x}' = R\vec{x}$$

$$2 \rightarrow 1 \text{ 映射保群乘法 } (U_1 U_2)^\dagger X (U_1 U_2) = U_2^\dagger U_1^\dagger X U_1 U_2^\dagger = U_2^\dagger X' U_2 = X''$$

$$\vec{x} \xrightarrow{R} \vec{x}' \xrightarrow{R} \vec{x}''$$

故 特殊么正群 $SU(2)$ 双重覆盖 特殊正交群 $SO(3)$

$SU(2)$ 同构于 $SO(3)$:

在单位元附近的 U [$-U$ 远离单位元] $\Rightarrow$ 在单位元附近的邻域里 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 同构 (1.1)。

• $SU(2)$ 的群元

$\vec{\varphi} = \varphi \hat{\varphi}$ φ 为 $\vec{\varphi}$ 大小, $\hat{\varphi}$ 为 $\vec{\varphi}$ 方向上的单位矢量

$$U \in SU(2) \text{ 可以写为 } U = e^{i\varphi \sigma_a/2} = e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}/2} \leftarrow \text{无迹矩阵的.}$$

$$\begin{aligned} \text{群元 } U &= e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}}{2} \right)^n = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{\varphi}{2} \right)^{2k} \right\} I + i \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\varphi}{2} \right)^{2k+1} \right\} \hat{\varphi} \cdot \vec{\sigma} \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} I + i \hat{\varphi} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

取转动的轴 $\hat{\varphi}$ 为 z 轴, $|\hat{\varphi} \cdot \vec{\sigma} = \sigma_3$

$$U = e^{i\varphi \sigma_3/2} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} = \cos \frac{\varphi}{2} I + i \sigma_3 \sin \frac{\varphi}{2}$$

• 半角变全角

$$X = \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \xrightarrow[\vec{x}' = R\vec{x}]{U^\dagger X U} X' = \vec{x}' \cdot \vec{\sigma} \quad \text{选定转轴为 } \sigma_3 \quad U^\dagger \sigma_3 U = \sigma_3$$

$$a=1,2 \quad U^\dagger \sigma_a U = \left(\cos \frac{\varphi}{2} I - i \sigma_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \sigma_a \left(\cos \frac{\varphi}{2} I + i \sigma_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$= \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \sigma_a - i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} [\sigma_3, \sigma_a]$$

$$U^\dagger \sigma_1 U = \cos \varphi \sigma_1 + \sin \varphi \sigma_2$$

$$U^\dagger \sigma_2 U = -\sin \varphi \sigma_1 + \cos \varphi \sigma_2$$

$$X' = U^\dagger (\alpha \sigma_1 + \beta \sigma_2 + \gamma \sigma_3) U = (\cos \varphi \alpha - \sin \varphi \beta) \sigma_1 + (\sin \varphi \alpha + \cos \varphi \beta) \sigma_2 + \gamma \sigma_3$$

$SU(2)$ 中的 $\pm U$ $\frac{\varphi}{2}$

$SO(3)$ 中的 R, φ

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \cos \varphi x - \sin \varphi y \\ y' = \sin \varphi x + \cos \varphi y \\ z' = z \end{cases} \quad \frac{\varphi}{2} [U] \rightarrow \varphi [R].$$

• 双重覆盖在量子力学中的应用.

考虑绕 z 轴的转动 $U(\varphi) = e^{i\varphi\sigma_z/2}$.

R 由 0 到 2π 会回到单位元 I .

$$U(2\pi) = e^{i(2\pi)\sigma_z/2} = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & \\ & e^{-i\pi} \end{pmatrix} = -I.$$

$$U(4\pi) = I.$$

即 $SU(2)$ 中转动一圈, $SO(3)$ 中转动两圈

§4.7 李群的群流形结构、测度、特征标.

• 群流形

$$SO(2) \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad R(2\pi) = R(0) \Rightarrow \text{circle}$$

$$SO(3) \quad \text{转动 } R \text{ 表示为 } \vec{\varphi} = \varphi \vec{n} \quad \varphi \in [0, \pi]$$

绕 $\vec{n}$ 轴转动 $\pi \Leftrightarrow$ 绕 $-\vec{n}$ 轴转动 π

恒元对应于球心 (半径为 0).

$\Rightarrow$ 半径为 π 的球体 且对径点认同.

· 特征标. $J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle$

$SO(3)$ 本征态 $e^{ij\varphi} |j, m\rangle = e^{im\varphi} |j, m\rangle$ j 标记表示, m 标记表示下的态

不可约表示 j 的特征标 转动角相同的转动 R 相互共轭 $R(\vec{n}, \varphi) \sim R(\vec{n}', \varphi)$.

$$\chi(j, \varphi) = \sum_{m=-j}^j e^{im\varphi} = e^{-ij\varphi} (1 + \dots + e^{2ij\varphi}) = \sin(j + \frac{1}{2})\varphi / \sin(\frac{\varphi}{2})$$

$e^{ij\varphi}$ 且表示的维度 = 恒元特征标 $\chi(j, 0) = 2j + 1$

标量表示 $\chi(0, \varphi) = 1$

旋量表示 $\chi(\frac{1}{2}, \varphi) = 2\cos\frac{\varphi}{2}$

矢量表示 $\chi(1, \varphi) = 1 + 2\cos\varphi$. 与 $SU(2)$ 一致.

· 群测度

$\sum_g f(g) \rightarrow \int_G f(g)$ 是否收敛

$\mathbb{R}^n$ 的测度 $dx_1, \dots, dx_n$ $dx_1 dx_2 dx_3 = r^2 dr d\Omega$.

e.g. $SO(2)$ vs $SO(1,1)$

$d\mu(g) = d\mu(g) = d\mu(I)$.

$SO(2)$ 紧致 $d\theta$ $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.

$SO(1,1)$ 非紧致 $d\varphi$ $\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi$ 发散.

$SO(2)$ 的乘法规则 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$

+ 条件 $0 \leq \theta < 2\pi$ S^1 $\Rightarrow$ 乘法表.

$SO(3)/SO(2) = S^2$

4 参数 $\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3)$.

$SU(2)$ S^3 $\begin{cases} U = e^{i\frac{\varphi}{2} \cdot \vec{\sigma}} = \cos\frac{\varphi}{2} I + i\sin\frac{\varphi}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{q} \\ U^\dagger U = U U^\dagger = 1, \det U = \pm 1 \end{cases}$

$SO(3)$ $\vec{n}[\theta, \varphi], \psi$

$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ $f(\psi)d\psi \propto \sin^2\frac{\psi}{2} d\psi$ (在单位元附近 $\sim \psi^2 d\psi$).

$SO(1,1)$ 的乘法规则 $L(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}$ $L(\varphi)L(\varphi') = L(\varphi + \varphi')$.

$\int_{SO(3)} d\mu(g) F(g) \propto \int d\psi \sin^2\frac{\psi}{2} F(g)$ 类函数 $F(\psi)$.

① 研究特征标正交性. 群测度积分 $\Rightarrow$ 转角 ψ 的积分 $(\theta, \varphi) \Rightarrow \vec{n}$ 立体角积分.

$$\text{SO}(3) \int_0^\pi d\varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \chi^*(k, \varphi) \chi(j, \varphi) = \int_0^\pi d\varphi \sin(k + \frac{1}{2})\varphi \sin(j + \frac{1}{2})\varphi = \frac{1}{2} \int d\varphi [\cos(j-k)\varphi - \cos(j+k+1)\varphi] = \frac{\pi}{2} \delta_{jk}.$$

$$\text{U}(1) \int_0^{2\pi} d\theta (e^{ik\theta})^* e^{+ij\theta} = 2\pi \delta_{jk} \quad \text{Fourier 级数}.$$

② C-G 系数分解. 定义 $z = e^{i\varphi}$

$$\chi(j) = z^j + \dots z^{-j} = (z^{j+1} - z^{-j}) / (z - 1).$$

$$\chi(k) \chi(j) = \chi(j+k) + \chi(j+k-1) + \dots + \chi(j-k).$$

$$\Rightarrow k \oplus j = (j+k) \oplus (j+k-1) \oplus \dots \oplus (j-k)$$

$\cdot \text{SO}(4)$ double cover $\text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2)$. [6维]

$$W = t + i\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \rightarrow W' = U^\dagger W U = t' + i\vec{x}' \cdot \vec{\sigma} \in \text{SU}(2) \cdot (t'^2 + \vec{x}'^2 = 1)$$

$$U, V \in \text{SU}(2) \quad (U, V) \text{ or } (-U, -V) \rightarrow R: W \rightarrow W' = R W.$$

$$\text{取特例 } U = V \quad W' = U^\dagger W U = t V^\dagger V + V^\dagger (i\vec{x} \cdot \vec{\sigma}) V = t + i\vec{x}' \cdot \vec{\sigma}$$

即 $\text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2)$ 的群 $\text{SU}(2) \leftrightarrow \text{SO}(4)$ 的群 $\text{SO}(3)$.

§4.4 Lorentz 群. $SO(1,1) \rightarrow SO(3,1)$

$$SO(1,1) \quad L(\varphi)L(\varphi') = L(\varphi + \varphi')$$

Galileo $D(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$ 满足 $D(u)D(v) = D(u+v) \quad \begin{cases} t' = t \\ x' = ut + x \end{cases}$

Lorentz boost $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad L^\dagger \eta L = \eta \quad \eta = \begin{pmatrix} -1 & \\ & +1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 恒元附近展开 $L = I + i\varphi K \quad \text{有 } K^\dagger \eta + \eta K = 0 \quad \begin{cases} t' = t + \varphi x \\ x' = \varphi t + x \end{cases}$

$\Rightarrow$ 生成元 $iK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma$

$\Rightarrow$ 有限大群元 $L(\varphi) = \exp(iK\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} iK$

$$= \cosh \varphi I + \sinh \varphi (iK)$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

$SO(3,1) \quad iK \rightarrow iK_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad iK_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad iK_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{x_{23}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{y_{23}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_z & 0 \end{pmatrix}$

保持度规不变 $L^\dagger \eta L = \eta \quad \eta = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$

$$J_z = i \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$iK_x = t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t}$$

...

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k$$

$$[K_x, K_y] = -i\epsilon_{ijk} J_k \quad \text{Lorentz 群 } SO(3,1) \text{ 的 Lie 代数}$$

$$[J_x, J_y] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

对比 $SO(4)$ 生成元 $J_{mn} = -J_{nm} \quad n, m = 1 \cdots 4$

$$\text{令 } J_{12} = J_3, J_{23} = J_1, J_{31} = J_2 \quad J_{i4} = K_i \quad i=1,2,3$$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

$$[K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \quad [\text{由于 } K^{SO(3,1)} = iK^{SO(4)}]$$

$$\text{定义 } J_{\pm 1} = \frac{1}{2}(J_1 \pm K_1)$$

Lie 代数上

$$[J_{+1}, J_{+j}] = i\epsilon_{ijk} J_{+k}$$

$SO(4)$ 与 $SO(2) \oplus SO(2)$ 一致

$$[J_{-i}, J_{-j}] = i\epsilon_{ijk} J_{-k}$$

$$[J_{+i}, J_{-j}] = 0$$

Lie代数上 $SO(3,1)$ 与 $SU(4) \otimes SU(2)$ 完全一致。

定义 $J_{\pm i} = \frac{1}{2}(J_i \pm iK_i)$	$SU(4) \quad SU(2)$ ↑ ↑	$(0,0)$	标量
$[J_{\pm i}, J_{\pm j}] = i\epsilon_{ijk} J_{\pm k}$	$\Rightarrow$ Lorentz群表示 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0)$	旋量
	表示维数 $(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	矢量(定义)

协变 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$ $M_+ = -j_- \dots j_+, M_- = -j_- \dots j_-$ $(0,1) (1,0)$

$$\eta_{\mu\nu} L^\mu_\rho L^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \quad ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + d\vec{x}^2$$

$$4 = 1 \oplus 3 \quad A^\mu = (A^0, \vec{A})$$

$$4 \otimes 4 = 6 \oplus 10 = (1 \oplus 3) \otimes (1 \oplus 3) = 3 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 3 \oplus 1 \oplus 1$$

反对称 $F^{\mu\nu} = 2\partial^{[\mu} A^{\nu]}$ $\leftrightarrow \vec{E}, \vec{B}$

Lorentz生成元的协变形式

$$J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$$

$$\Rightarrow [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma}) \quad \text{Lie代数}$$

Lorentz变换 $L = e^{-\frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}} \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$

Poincaré群 = Lorentz群 + 平移 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$ $6+4=10$ 个参数

$$g(L_2, a_2) g(L_1, a_1) = g(L_2 L_1, L_2 a_1 + a_2)$$

平移生成元 $P^\mu \quad (I - i a^\mu P_\mu) x^\lambda = x^\lambda + a^\mu$

Poincaré群 Lie代数

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = -i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

粒子作为Poincaré群的不可约表示 — Casimir算符 $P^2 = m^2$

本征态 $|n, j\rangle$ $W_\sigma = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\mu\nu} P^\rho \Rightarrow W_\sigma W^\sigma m^2 = j(j+1)$

§4.9 $SL(2, \mathbb{C})$ 双重覆盖 $SO(3,1)$: 由群论到 Weyl 方程.

$$SU(2)/\mathbb{Z}_2 = SO(3),$$

$SL(2, \mathbb{C})$ double cover $SO(3,1)$.

$$SU(2) \otimes SU(2)/\mathbb{Z}_2 = SO(4). \quad \begin{matrix} u=v & \text{转动} \\ u^\dagger=v & \text{boost} \end{matrix}$$

自由度 $(4-1) \times 2 = 6$

$$\chi_E = \chi^\dagger I + i \vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}$$

$$\chi_M = \chi^0 I + \vec{\chi} \cdot \vec{\sigma} \quad \text{取 } L \in SL(2, \mathbb{C}) \text{ or } -L. \text{ [double cover]}$$

$$\chi_M \rightarrow \chi'_M = L^\dagger \chi_M L = \chi'_M{}^0 I + \vec{\chi}'_M \cdot \vec{\sigma} \quad \det \chi_M = \det \chi'_M = (\chi^0)^2 - \vec{\chi}^2 \text{ 相对空间不变.}$$

[Lorentz 群表示] 限制在子群 $SO(3)$ 上.

$$\text{转动生成元 } J_i = J_+ + J_-$$

$$SO(3,1) \text{ 群表示的直和分解 } (j^+, j^-) \rightarrow (j^+ + j^-) \oplus \cdots \oplus |j^+ - j^-|$$

$$(s, 0) \text{ or } (0, s) \rightarrow s \quad (0, \frac{1}{2}) \text{ or } (\frac{1}{2}, 0) \rightarrow \frac{1}{2} \quad \phi_{m=1,2} \text{ 旋量.}$$

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow 1 \oplus 0 \text{ [4维矢量分解为3维矢量+1维标量]}. V^M(\phi_{m_+, m_-})$$

$$\begin{array}{ll} \text{对旋量表示 } (\frac{1}{2}, 0) & J_+ = \frac{1}{2}(J_1 + iK_1) \rightarrow \frac{1}{2}\sigma_1 \\ \text{(自旋 } \frac{1}{2}) & J_- = \frac{1}{2}(J_1 - iK_1) \rightarrow 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} J_+ \\ J_- \end{array}} \right\} \text{右手 Weyl spinor} \quad \begin{array}{l} J_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 \\ iK_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (0, \frac{1}{2}) & J_+ = \frac{1}{2}(J_1 + iK_1) \rightarrow 0 \\ \text{左手 } (\frac{1}{2}, 0) & J_- = \frac{1}{2}(J_1 - iK_1) \rightarrow \frac{1}{2}\sigma_1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} J_+ \\ J_- \end{array}} \right\} \text{左手 Weyl spinor} \quad \begin{array}{l} J_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 \\ iK_1 = -\frac{1}{2}\sigma_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} J: u \rightarrow e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} u = e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} u \\ iK: u \rightarrow e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{K}} u = e^{-\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} u \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} J \\ iK \end{array}} \right\} SO(3,1) \quad u \rightarrow e^{i(\vec{\theta} + i\vec{\varphi}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} u = e^{i\vec{\tilde{\theta}} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} u$$

$$\begin{array}{l} J: v \rightarrow e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} v = e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} v \\ iK: v \rightarrow e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{K}} v = e^{-\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} v \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} J \\ iK \end{array}} \right\} SO(3,1) \quad v \rightarrow e^{i(\vec{\theta} + i\vec{\varphi}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} v = e^{i\vec{\tilde{\theta}} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} v.$$

$$\begin{array}{l} J \left\{ \begin{array}{l} u^\dagger \rightarrow u^\dagger e^{-i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \\ v^\dagger \rightarrow v^\dagger e^{-i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{array} \right. \quad iK \left\{ \begin{array}{l} u^\dagger \rightarrow u^\dagger e^{-\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \\ v^\dagger \rightarrow v^\dagger e^{-\vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{array} \right.$$

$$\text{利用 } \sigma_2 \sigma_1^* \sigma_2 = -\sigma_1$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \tilde{u} &= i\sigma_z u^* & \tilde{u} &\rightarrow i\sigma_z e^{-i(\vec{\theta}+\vec{i}\vec{\varphi})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} u^* = e^{i(\vec{\theta}+\vec{i}\vec{\varphi})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \tilde{u} \Rightarrow \tilde{u} \in (0, \frac{1}{2}) \\ \tilde{v} &= i\sigma_z v^* & \tilde{v} &\rightarrow i\sigma_z e^{-i(\vec{\theta}-\vec{i}\vec{\varphi})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} v^* = e^{i(\vec{\theta}-\vec{i}\vec{\varphi})\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \tilde{v} \Rightarrow \tilde{v} \in (\frac{1}{2}, 0) \end{aligned}$$

$$\text{Parity } \vec{x} \rightarrow -\vec{x} \quad \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \quad \vec{j} \rightarrow \vec{j}, \vec{k} \rightarrow -\vec{k} \Rightarrow \vec{j} \leftrightarrow \vec{j}$$

$$\text{导致 } j_+, j_- \text{ 相互交换} \quad (0, \frac{1}{2}) \leftrightarrow (\frac{1}{2}, 0)$$

$(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ Dirac spinor 4-分量

Weyl 方程/拉氏量:

$$\text{转动 } U^\dagger U \rightarrow U^\dagger e^{-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} U = U^\dagger U$$

$$\text{boost } U^\dagger U \rightarrow U^\dagger e^{i\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{-i\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} U \approx U^\dagger U + i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma} U$$

$$\Rightarrow W^\mu = (U^\dagger U, U^\dagger \vec{\sigma} U) \text{ 是一个4分量. 记 } \sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}) \text{ 则有 } W^\mu = U^\dagger \sigma^\mu U$$

构造 Weyl 拉氏量——要求 $\mathcal{L}$ 在 Lorentz 变换下不变

$\mathcal{L} = \partial_\mu W^\mu$ 作为全微分不影响运动方程

$$u(x) = e^{-ipx} u(p)$$

$\mathcal{L} = iU^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu U \Rightarrow$ 右手 Weyl 方程 $\sigma^\mu \partial_\mu U = 0$ (坐标空间) or $\sigma^\mu p_\mu U = 0$ (动量空间)

$$\begin{aligned} (1, 0) \quad & iU^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot \vec{v} \right) U & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot \vec{v} \right) U &= 0 & (E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) U &= 0 \end{aligned}$$

左边同时作用 $(E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})$ 可得 $E = |\vec{p}|$ 即右手 Weyl 方程描述无质量自旋 $\frac{1}{2}$ 费米子

$$(1, 0) \quad \mathcal{L} = iV^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu V \Rightarrow \text{左手 Weyl 方程 } \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu V = 0 \quad \text{or} \quad \bar{\sigma}^\mu p_\mu V = 0 \quad \text{记 } \bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$$

$$= iV^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{v} \right) V \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{v} \right) V = 0 \quad (E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) V = 0$$

左边同时作用 $(E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})$ 可得 $E = |\vec{p}|$ 即左手 Weyl 方程描述无质量自旋 $\frac{1}{2}$ 费米子

定义螺旋度 helicity $\hat{h} \equiv \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

定义投影算符 $\mathcal{P} \equiv \frac{1}{2}(1 - \vec{\sigma} \cdot \hat{p}) = \frac{1}{2}(1 - h)$

$$\text{右手 } (1 - \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}) U = 0 \quad h = +1 \quad \xrightarrow{\text{z轴}} \quad \mathcal{P} U = 0 \Rightarrow U \text{ 中 } h = +1 \text{ 分量为 } 0$$

$$\text{左手 } (1 + \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}) V = 0 \quad h = -1 \quad \xrightarrow{\text{z轴}} \quad \mathcal{P} V = 0$$

$$\text{选定 } \vec{p} = (0, 0, p) \quad p > 0. \quad (E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) U = \begin{pmatrix} E-p & 0 \\ 0 & E+p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$E, p > 0 \Rightarrow u_2 = 0 \text{ 且 } E = p$$

§4.10 由 Weyl 方程到 Dirac 方程.

Dirac spinor 要求理论宇称守恒 (左手 Weyl 旋量平权出现), 存在质量 (u, v 耦合).

引入组合项 $m(u^\dagger v + v^\dagger u)$ $2 \text{ Weyl} \rightarrow 1 \text{ Dirac}$.

Dirac Lagrangian $\mathcal{L} = i u^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu u + i v^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu v - m(u^\dagger v + v^\dagger u)$

对 u 变分 $i \sigma^\mu \partial_\mu u = m v$ or $\sigma^\mu p_\mu u = (E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) u = m v$

对 v 变分 $i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu v = m u$ or $\bar{\sigma}^\mu p_\mu v = (E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) v = m u$

4 分量的 Dirac 费米子满足 $(E^2 - |\vec{p}|^2) u, v = m^2 u, v$, 存在质量 m . 具有两个螺旋度本征态 $h = \pm 1$.

$\Rightarrow$ 描述电子的相对论性运动方程.

令 $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ Dirac 方程有 $\begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu p_\mu \psi(p) \\ \sigma^\mu p_\mu \psi(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu p_\mu \\ \sigma^\mu p_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(p) \\ v(p) \end{pmatrix}$

引入 γ 矩阵 $\gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m) \psi(p) = 0$ or $(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0$

• Clifford 代数与 Gamma 矩阵

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\nu \\ \sigma^\nu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \end{pmatrix} = 2 \eta^{\mu\nu} \mathbb{I}.$$

Clifford algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \eta^{\mu\nu} \mathbb{I}$

有 $(p_\mu \gamma^\mu)(q_\nu \gamma^\nu) = p \cdot q = p^0 q^0 - \vec{p} \cdot \vec{q}$ 定义 $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ $(\not{p})^2 = p^2$

Dirac 方程 $(i \not{\partial} - m) \psi = 0$ or $(\not{p} - m) \psi = 0$.

$$(\not{p} + m)(\not{p} - m) \psi = (p^2 - m^2) \psi = 0 \Rightarrow E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2.$$

• 由 Dirac 形式推回 Weyl

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{定义 } \gamma_5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 \text{ 满足 } (\gamma_5)^2 = 1, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

$$\text{有投影算符 } P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad \text{满足 } P_{L,R}^2 = P_{L,R}, \quad P_L P_R = 0$$

$$\text{给出左右手 } \begin{cases} \psi_L = P_L \psi \\ \psi_R = P_R \psi \end{cases} \quad \psi = \psi_L + \psi_R \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\psi}_L = m \psi_R \\ \cancel{\psi}_R = m \psi_L \end{cases}$$

Weyl spinors

$$\text{对于一个仅有 } \psi_L \text{ 或 } \psi_R \text{ 的粒子 } \cancel{\psi}_L = 0 \quad (\psi_R = 0).$$

• Lorentz 变换下的 Dirac 旋量.

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(L) \psi(x).$$

$$\text{无穷小展开 } L \simeq I + \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \Rightarrow S(L) \simeq I - \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \quad \text{生成元 } J^{\mu\nu} \text{ 的旋量表示}$$

[所有 4×4 矩阵中至多有 16 个矩阵线性独立].

$$\gamma \text{ 矩阵个数 } 0: I \quad \textcircled{1}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$$

$$1: \gamma^\mu \quad \textcircled{4}$$

6 个

$$2: \sigma^{\mu\nu} \quad \textcircled{6} \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \eta^{\mu\nu} - i \sigma^{\mu\nu} \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

$$3: \gamma^\mu \gamma^5 \quad \textcircled{4}$$

$$(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2}).$$

$$4: \gamma^5 \quad \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow 4 \times 4 \text{ 矩阵空间中的一组完备基 } \{I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^5\}.$$

$$\text{故若 } \psi(x) \text{ 满足 Dirac 方程 } (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

$$\text{则 } \psi(x') \equiv S(L) \psi(x) \text{ 满足 } (i \gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi(x') = 0.$$

$$S \gamma^\lambda S^{-1} = L^\lambda{}_\mu \gamma^\mu.$$

• Lorentz 群的 6 维表示 $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. —— 伴随表示.

$$\text{转动生成元 } \vec{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad \text{boost 生成元 } -i \vec{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

• Dirac 旋量.

$$u^\dagger v + v^\dagger u = \psi^\dagger \gamma^0 \psi \equiv \bar{\psi} \psi \quad \text{其中 } \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

旋量 $1 = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \quad \not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$.

ψ 是 Lorentz 不变的: $\psi \rightarrow (I - \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}) \psi$; $\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger (1 + \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu})^\dagger)$

且 $(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0$ 而 $S(L)^\dagger = \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}} \gamma^0$.

• Dirac 双线性.

线性独立的 4x4 矩阵 $\{I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma_5, \gamma_5\}$ 表示为 $\Gamma \Rightarrow$ Dirac bilinear $\bar{\psi} \Gamma \psi$.

$\bar{\psi} I \psi$ Lorentz scalar

$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ Lorentz vector

$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$ antisymmetric tensor

$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ axial vector

$\bar{\psi} \gamma_5 \psi$ pseudoscalar

16 Dirac bilinears $\rightarrow$ C-G 分解.

$$[(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})] \otimes [(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})]$$

$$= (0, 0) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (1, 0) \oplus (0, 1) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (0, 0).$$

§4.11 Dirac 与 Majorana 旋量

• 费米子

引入电磁场耦合常数 $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ie A_\mu$.

电磁场存在时的 Dirac 方程 $[i \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) - m] \psi = 0$ 反物质 $\psi_c (e \rightarrow -e)$.

取复共轭 $[-i \gamma^{\mu*} (\partial_\mu + ie A_\mu) - m] \psi^* = 0$

$-\gamma^{\mu*}$ 满足 Clifford 代数, 表示为不同基下的 γ^μ $-\gamma^{\mu*} = (C \gamma^\mu)^{-1} \gamma^\mu (C \gamma^0)$

定义 $\psi_c \equiv C \gamma^0 \psi^*$ s.t. $[i \gamma^\mu (\partial_\mu + ie A_\mu) - m] \psi_c = 0$. ψ_c 代表正电子且选取 $C = \gamma^2 \gamma^0$

· 旋量的电荷共轭在 Lorentz 变换下以旋量形式变换。

$$\text{利用 } (C\gamma^\mu)^* = -\gamma^\mu (C\gamma^\mu) \Rightarrow C\gamma^\mu (\sigma^{\mu\nu})^* = -\sigma^{\mu\nu} C\gamma^\mu$$

$$\text{在 Lorentz 变换下 } \psi \rightarrow e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\psi \Rightarrow \psi^* \rightarrow e^{+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})^*}\psi^*$$

$$\Rightarrow \psi_c = C\gamma^0\psi^* \rightarrow C\gamma^0 e^{+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})^*}\psi^* = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\psi_c.$$

· 电荷共轭与/或宇称性。

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \psi_c = \gamma^2\psi^* = \begin{pmatrix} -\sigma_2 u^* \\ \sigma_2 v^* \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ -\tilde{u} \end{pmatrix}$$

$$\text{利用 } \sigma_2 \sigma_1^* \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1^T \sigma_2 = -\sigma_1 \quad \text{可知 } (\psi_c)_c = \gamma^2 (\gamma^2\psi^*)^* = \gamma^2 (-\gamma^2)\psi = \psi.$$

· Majorana 方程与中微子。

$$\text{Dirac 方程 } i\not{\partial}\psi = m\psi \Rightarrow \text{Majorana 方程 } i\not{\partial}\psi = m\psi_c. \quad \psi_c = \gamma_2\psi^*$$

$$i\not{\partial}\psi_c = m\psi.$$

$$\text{再作用 } i\not{\partial} \text{ 有 } -\not{\partial}\psi = m(i\not{\partial}\psi) = m^2\psi \quad \text{即 } p^2 = m^2 \quad m \text{ 为 Majorana 质量.}$$

$$\text{假设作用量具有 } U(1) \text{ 对称性 } \psi \rightarrow e^{i\omega}\psi, \psi_c \rightarrow e^{-i\omega}\psi_c \quad \omega \in [0, 2\pi)$$

如电荷守恒 / 轻子数守恒相关的对称性。

若 Majorana 方程成立, 则对称性被破坏 $\Rightarrow$ Majorana 方程描述电中性的自旋 $\frac{1}{2}$ 费米子

$\Rightarrow$ 中微子。

若中微子存在 Majorana 质量, 则会导致轻子数守恒被破坏。

$$\text{Majorana 拉氏量 } \mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m (\psi^T C \psi + \text{h.c.}).$$

$$\text{三种中微子 } \Rightarrow \sum_{a,b} \psi_a^T M_{ab} C \psi_b \quad M_{ab} \text{ 为质量矩阵.}$$

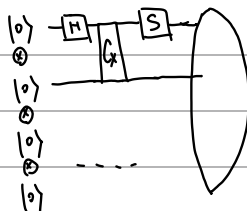
Clifford Group:

Pauli群 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Pauli群 Z_2 . 

$X^2 = I = Y^2 = Z^2$ 不考虑相位 $XZ = Y$ $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

CNOT = $C_X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$



构成量子纠缠 [可被经典严格模拟].

Cphase = $S = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & i \end{pmatrix}$

$H \otimes I \otimes I \otimes I$.

$g|4\rangle = |4\rangle$

$U|4\rangle = U g|4\rangle = U g (U^\dagger U) g|4\rangle = (U g U^\dagger) U|4\rangle$

Pauli群的正规化子. 生成元 $\langle -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \rangle$

第五章 点群空间群

§5.1 正多面体的固有对称变换群

不含空间反演操作的对称变换——固有对称变换。

1. 正多面体 全部可能的正多面体及其参数

名称	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
透视图					
侧面边数 n	3	4	3	5	3
顶点棱数 m	3	3	4	3	5
侧面数 N	4	6	8	12	20
顶点数 V	4	8	6	20	12
总棱数 L	6	12	12	30	30
固有对称变换群	T	O	O	Y	Y
阶数 $2L$	12	24	24	60	60

基本概念：

C_n 群：绕空间固定轴转动 $\frac{2\pi}{n}$ 角的变换 R 生成的群。（轴的方向）

+ R 为系统对称变换 $\Rightarrow$ n 个固有转动轴， n 次转动 $n=2$ 转 π / $n=3$ 转 $\frac{2\pi}{3}$ / $n=4$ 转 $\frac{\pi}{2}$

D_n 群：正 N 边形对称变换群 1 个 N 次轴， N 个二次轴。

二次轴为对顶连线和对边中点连线 (N 为偶)，顶边与对边中点连线 (N 为奇)

设 $\vec{n}$ 方向为系统 n 次轴， R 为以 $\vec{n}$ 为轴的 n 次转动

S ： $n-1$ 个同次轴正方向可由群中变换元素联系，则为等价轴，转动相同角度的变换共轭

双向轴：轴的正反方向可由对称群中元素联系。
 D_n 群的类和不变子群
 $N=2n$ ：一个 N 次轴是双向轴， N 个二次轴分成两组（对顶角和对边中点连线），分别互相等价。

$n+3$ 个自逆类：
 $\{E\} \quad \{T^m, T^{-m}\} \quad \{T^n\} \quad (1 \leq m \leq n-1)$
 $\{S_{2n}, S_{2n-2}, \dots, S_{2n-2n+2}\} \quad \{S_{2n-1}, S_{2n-3}, \dots, S_{2n-2n+1}\}$

非平庸不变子群：
 $\{E, T, T^2, \dots, T^{n-1}\} \quad \{E, T^n\} \quad \{E, T^2, T^4, \dots, T^{2n-2}\}$
 $\{E, T^2, T^4, \dots, T^{2n-2}, S_{2n}, S_{2n-2}, \dots, S_{2n-2n+2}\}$
 $\{E, T^2, T^4, \dots, T^{2n-2}, S_{2n-1}, S_{2n-3}, \dots, S_{2n-2n+1}\}$

$N=2n+1$ ：一个 N 次轴是双向轴， N 个二次轴互相等价。

$n+2$ 个自逆类：
 $\{E\} \quad \{T^m, T^{-m}\} \quad \{S_{2n}, S_{2n-2}, \dots, S_{2n-2n+2}\} \quad (1 \leq m \leq n)$

非平庸不变子群：
 $\{E, T, T^2, \dots, T^{n-1}\}$ 及其不变子群

2. T群

建立如图所示的坐标系。将立方体不相邻的顶点联结起来构成正四面体。

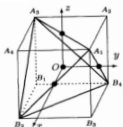
正四面体的对称变换都是立方体的对称变换，反之则不然。因此，正四面体的固有群T群是立方体固有群O群的子群。

3个坐标轴是正四面体的二次轴，将绕这3个二次轴转 π 的元素记为 T_x^2, T_y^2, T_z^2 。

立方体的4根对角线是正四面体的三次轴，分别以指向正四面体的顶点 A_1, B_2, A_3, B_4 的方向为正方向，将绕这4个三次轴转 $2\pi/3$ 的元素记为 R_1, R_2, R_3, R_4 。

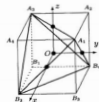
正四面体三次轴的转动使3个二次轴等价，二次轴的转动使4个三次轴等价，但三次轴不是双向轴。

正四面体所有固有对称变换的集合构成T群，共12个元素，恒元是一类，绕3个二次轴转动的3个元素是一类，绕4个三次轴正、逆向转动的8个元素分成两类，共4个类。前2个类是自逆类，后2个类是相逆类。



固有对称变换群T群的乘法表

	E	T _x ²	T _y ²	T _z ²	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₁ ²	R ₂ ²	R ₃ ²	R ₄ ²
E	E	T _x ²	T _y ²	T _z ²	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₁ ²	R ₂ ²	R ₃ ²	R ₄ ²
T _x ²	T _x ²	E	T _y ²	T _z ²	R ₄	R ₃	R ₂	R ₁	R ₄ ²	R ₃ ²	R ₂ ²	R ₁ ²
T _y ²	T _y ²	T _x ²	E	T _z ²	R ₃	R ₄	R ₁	R ₂	R ₃ ²	R ₄ ²	R ₁ ²	R ₂ ²
T _z ²	T _z ²	T _x ²	T _y ²	E	R ₂	R ₁	R ₄	R ₃	R ₂ ²	R ₁ ²	R ₄ ²	R ₃ ²
R ₁	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₁ ²	R ₂ ²	R ₃ ²	R ₄ ²	E	T _x ²	T _y ²	T _z ²
R ₂	R ₂	R ₁	R ₄	R ₃	R ₂ ²	R ₁ ²	R ₄ ²	R ₃ ²	E	T _x ²	T _y ²	T _z ²
R ₃	R ₃	R ₄	R ₃ ²	R ₂ ²	R ₃ ²	R ₄ ²	R ₁ ²	R ₂ ²	E	T _x ²	T _y ²	T _z ²
R ₄	R ₄	R ₃	R ₂ ²	R ₁ ²	R ₄ ²	R ₃ ²	R ₂ ²	R ₁ ²	E	T _x ²	T _y ²	T _z ²



核: 2

生成元: 可取 T_x^2, R_1

子群: $\{E, T_i^2\} (i=x, y, z)$

$\{E, R_i, R_i^2\} (i=1-4)$

$\{E, T_x^2, T_y^2, T_z^2\}$

不变子群:

$\{E, T_i^2, T_j^2, T_k^2\}$

3. O群

建立如图所示的坐标系。立方体六个侧面的中心联结起来构成正八面体，正八面体八个侧面的中心联结起来成立方体，它们互为对偶正多面体，有相同的固有对称变换群—O群。

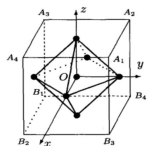
3个坐标轴是立方体的四次轴，将绕这3个四次轴转 $\pi/2$ 的元素记为 T_x, T_y, T_z 。

立方体的4根对角线是立方体的三次轴，分别以指向 A_1, B_2, A_3, B_4 的方向为正方向，将绕这4个三次轴转 $2\pi/3$ 的元素记为 R_1, R_2, R_3, R_4 。

联结立方体相对棱中点的连线是立方体的6个二次轴，将绕这6个二次轴转 π 的元素记为 $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ 。

立方体四次轴的转动使3个四次轴等价、双向，4个三次轴等价、双向，6个二次轴等价。

立方体的所有固有对称变换的集合构成O群，它有24个元素，恒元是一类，绕3个四次轴正、逆向转 $\pi/2$ 的6个元素是一类，转 π 的3个元素是一类，绕4个三次轴正、逆向转动的8个元素是一类，绕6个二次轴转动的6个元素是一类，共5个类。这5个类都是自逆类。



O群乘法表: 扩充T群乘法表
($O = T \cup S, T = T \cup TS_i$)

	{T}	{TS _i }
{T}	已知	右乘S _i
S _i {T}	左乘S _i	左乘S _i 右乘S _i

O群关于子群T群的陪集表

	E	T _x ²	T _y ²	T _z ²	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₁ ²	R ₂ ²	R ₃ ²	R ₄ ²	
左乘S ₁	S ₁	T _x	T _y	T _z	S ₂	T _x	T _y	T _z	S ₃	T _x	T _y	T _z	S ₄
	S ₁	T _x	T _y	T _z	S ₂	T _x	T _y	T _z	S ₃	T _x	T _y	T _z	右乘S ₁
左乘S ₂	E	T _x ²	T _y ²	T _z ²	R ₁ ²	R ₂ ²	R ₃ ²	R ₄ ²	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	右乘S ₂

O群性质

核: 2

A₄ 生成元: 可取 T_x, R_1

子群: $\{E, T_i^2\} (i=x, y, z)$

$\{E, S_i\} (i=1-6)$

$\{E, R_i, R_i^2\} (i=1-4)$

$\{E, T_x, T_y, T_z\} (i=x, y, z)$

$\{E, T_x^2, T_y^2, T_z^2\}$ (不变子群, $O/V_4=D_4$)

$\{E, T_x^2, S_1, S_2\}$

$\{E, T_x^2, S_3, S_4\}$

$\{E, T_x^2, S_5, S_6\}$

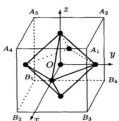
$\{E, T_x^2, T_y^2, T_z^2, S_1, S_2, T_x, T_y\}$

$\{E, T_x^2, T_y^2, T_z^2, S_3, S_4, T_x, T_y\}$

$\{E, T_x^2, T_y^2, T_z^2, S_5, S_6, T_x, T_y\}$

$\{E, T_x^2, T_y^2, T_z^2, R_1, R_2, R_3, R_4, R_1^2, R_2^2, R_3^2, R_4^2\}$

(不变子群, $OI \cong C_4$)



类: {E}

$\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$

$\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_1^2, R_2^2, R_3^2, R_4^2\}$

$\{T_x, T_y, T_z, T_x^2, T_y^2, T_z^2\}$

$\{T_x^2, T_y^2, T_z^2\}$

4. Y群

建立如图所示的坐标系。正二十面体和正十二面体互为对偶正多面体，有相同的固有对称变换群—Y群。

正二十面体的6个相对顶点的连线是**正二十面体的6个五次轴**。

(10) (6)

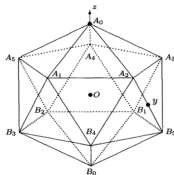
两个相对侧面中心的连线是**正二十面体的10个三次轴**。

联结正二十面体相对棱中点的连线是**正二十面体的15个二次轴**。

(15)

正二十面体五次轴的转动使6个五次轴等价、双向，10个三次轴等价、双向，15个二次轴等价。

正二十面体的所有固有对称变换的集合构成Y群，它有60个元素，恒元是一类，绕6个五次轴正、逆向转 $2\pi/5$ 的12个元素是一类，正、逆向转 $4\pi/5$ 的12个元素是一类，绕10个三次轴正、逆向转动的20个元素是一类，绕15个二次轴转动的15个元素是一类，共5个类。这5个类都是自逆类。Y群没有非平庸不变子群。



§5.2 固有群

- **点群**：让体系的一个点保持位置不变的对称操作构成的有限群。

在对称变换下保持位置不变的点是点群所有对称变换轴的交点（通常将其选为坐标原点）。

- **固有转动**：三维空间中纯的转动称为固有转动，它保持坐标原点不变、保持固定在转动对象上的坐标系的手性不变、保持空间任意两点间的距离不变。
- **非固有转动**：三维空间中纯转动后再做反演操作的转动称为非固有转动，它保持坐标原点不变、保持空间任意两点间的距离不变，但改变了固定在转动对象上的坐标系的手性。

- **固有有点群**：由固有转动的集合构成的点群。

固有有点群是SO(3)群的有限子群。

- **非固有有点群**：由固有转动和非固有转动的集合构成的点群。

非固有有点群是O(3)群的不属于SO(3)群的有限子群。

非固有有点群一定包含若干固有转动元素（至少恒元是固有转动元素）。

固有有点群包括 C_N 群、 D_N 群及正多面体固有对称变换群。

?

- **极点**：以对称变换轴的交点为球心、以任意 $r > 0$ 为半径作一球面 S_r ，则任一固有转动轴与球面有两个交点，称为极点，即极点是固有有点群 G 中非恒等转动轴与 S_r 的交点。

例： C_N 群、 D_N 群、 T 群、 O 群、 Y 群分别有2个、 $2N+2$ 个、14个、26个、62个极点。

- **群轨道**：设 x 是一个极点，当 R 取遍群 G 的元素时， Rx 的集合称为对称变换群 G 含极点 x 的轨道，即 $\{Rx | R \in G\}$ 为含极点 x 的群轨道。

一个双向轴对应的两个极点在同一个轨道；等价极性轴正、反方向对应的极点分别构成一个群轨道。在群 G 元素的作用下，同一群轨道上的点可以互相变换。

[轨道陪集子]

- **迷向子群**：绕群 G 的对应极点为 x 的 n 次轴转动的 n 个元素的集合构成群 G 的一个循环子群，称为群 G 关于点 x 的迷向子群 G^x ，即 $G^x = \{R \in G | Rx = x\}$ 。迷向子群 G^x 的每个元素都保持点 x 不动。

- **群轨道定理**：含极点 x 的群轨道上的点，与迷向子群 G^x 的左陪集一一对应。

证：设 y 是含 x 的群轨道上的点，即有 $R \in G$ ，使 $Rx = y$ 。

点 x 在 G^x 元素作用下不变，它在左陪集 RG^x 元素作用下转到 y 点。

若有 $S \in G$ ，使 $Sx = y$ ，则由 $Sx = y = Rx$ 得 $S = R^{-1}Sx$ ，即 $R^{-1}S \in G^x$ ，从而 $S \in RG^x$ 。

故含 x 的群轨道上的点与 G^x 的左陪集一一对应。

群轨道定理建立了陪集的代数概念与轨道的几何概念的联系。

G 的阶数/ G^x 的阶数

- 群轨道定理表明，含极点 x 的群轨道上极点的个数，等于迷向子群 G^x 的指数。

例： D_3 群含 A 的轨道上有 $6/2=3$ 个极点，含 z 的轨道上有2个极点。

极点方程: 固有子群 G 的阶数为 g , 第 i 个轨道的极点 x_i 对应 n_i 次转轴,

一个 n_i 次轴对应 2 个极点, 非恒等变换有 $n_i - 1$ 个 $\Rightarrow$ 一个极点对应 $\frac{n_i - 1}{2}$ 个非恒等变换

极点个数由轨道稳定子定理给出: g/n_i G 的极点共有 l 个轨道

固有子群 (第 i 类群) 基本方程 $\sum_{i=1}^l \frac{g}{n_i} \frac{n_i - 1}{2} = g - 1$ 或 $\sum_{i=1}^l (1 - \frac{1}{n_i}) = 2(1 - \frac{1}{n})$

给出固有子群 G 的阶 g 与可能存在的转轴次数 n_i 的关系.

l 为轨道数, n_i 为第 i 个轨道上极点对应转轴次数, g/n_i 为第 i 个轨道上的极点个数.

① $l=2$ $n_1=n_2=g$

全部极点分为两个轨道, 各有 1 个极点对应 1 个 $N=g$ 次轴 —— N 阶循环群 C_N

② $l=3$

1° $n_1=2, n_2=2, n_3=2$ 取 $g=2N$

全部极点分为三个轨道. 1 轨道有 2 个极点对应 1 个 N 次轴 (双向)

2, 3 轨道上各有 N 个极点对应 N 个二次轴

—— D_N .

2° $n_1=3, n_2=3, n_3=2$ T 群

3° $n_1=4, n_2=3, n_3=2$ O 群

4° $n_1=5, n_2=3, n_3=2$ Y 群

§5.3 非固有群 [第一类群].

1. 构造非固有群

固有群 H $\left\{ \begin{array}{l} \text{直积 } V_2 = \{E, I\} \quad G = H \cup IH = H \otimes V_2 \quad \text{I型非固有群} \\ \text{将含指数为2的不变子群的固有子群 } G' \text{ 中所有陪集元素} \times I \quad \text{P型非固有群} \end{array} \right.$

2. I型非固有群

$$C_n \cup IC_n = C_n \otimes V_2$$

阿贝尔群, 阶为 $2n$, 共 $2n$ 个类.

n 为奇数时, $C_n \cup IC_n \cong C_{2n}$; $n=2$ 时, $C_2 \cup IC_2 \cong D_2$

$$D_n \cup ID_n = D_n \otimes V_2 \quad (n \geq 2)$$

阶为 $4n$, n 为偶数时有 $n+6$ 个类, n 为奇数时有 $n+3$ 个类.

$$n \text{ 为奇数时, } D_n \cup ID_n \cong D_{2n}$$

$$T \cup IT = T \otimes V_2$$

阶为 24, 共 8 个类

$$O \cup IO = O \otimes V_2$$

阶为 48, 共 10 个类

$$Y \cup IY = Y \otimes V_2$$

阶为 120, 共 10 个类

3. P型非固有群

含有指数为 2 的不变子群 H 的固有群 G 共四种:

$\triangleright C_{2n}$, $H = C_n = \{E, T^2, T^4, \dots, T^{2n-2}\}$, 阿贝尔群, 阶为 $2n$, 共 $2n$ 个类

$\triangleright D_n$, $H = C_n = \{E, T, T^2, \dots, T^{n-1}\}$, 阶为 $2n$, n 为偶数时有 $n/2+3$ 个类, 为奇数时有 $(n+3)/2$ 个类

$\triangleright D_{2n}$, $H = D_n = \{E, T^2, T^4, \dots, T^{2n-2}, S_0, S_2, \dots, S_{2n-2}\}$, 阶为 $4n$, 共 $n+3$ 个类

$\triangleright O$, $H = T$, 阶为 24, 共 5 个类

P型非固有群 $G' = H \cup \{IR \mid R \in G, R \notin H\}$ 相应也分四种:

$\triangleright G' \cong C_{2n}$, $C_n \cup \{IR \mid R \in C_{2n}, R \notin C_n\}$, 阿贝尔群, 阶为 $2n$, 共 $2n$ 个类

$\triangleright G' \cong D_n$, $C_n \cup \{IR \mid R \in D_n, R \notin C_n\}$, 阶为 $2n$, n 为偶数时有 $n/2+3$ 个类, 为奇数时有 $(n+3)/2$ 个类

$\triangleright G' \cong D_{2n}$, $D_n \cup \{IR \mid R \in D_{2n}, R \notin D_n\}$, 阶为 $4n$, 共 $n+3$ 个类

$\triangleright G' \cong O$, $T \cup \{IR \mid R \in O, R \notin T\}$, 阶为 24, 共 5 个类

I型非固有群为相应固有群与 V_2 群的直积;
P型非固有群与相应固有群同构。

4. 非固有群的 Schönfli 分类.

在 Schönfli 分类中, 所有非固有群包括 9 种: S_{2n} , C_{nh} , C_{nv} , D_{nh} , D_{nd} , T_h , O_h , Y_h , T_d

Schönfli 分类		I 型非固有群	P 型非固有群
S_{2n}	n 为奇数	$C_n \cup IC_n = C_n \otimes V_2$	
	n 为偶数		$G' = C_n \cup \{IR \mid R \in C_{2n}, R \notin C_n\} \cong C_{2n}$
C_{nh}	n 为奇数		$G' = C_n \cup \{IR \mid R \in C_{2n}, R \notin C_n\} \cong C_{2n}$
	n 为偶数	$C_n \cup IC_n = C_n \otimes V_2$	
C_{nv}			$G' = C_n \cup \{IR \mid R \in D_n, R \notin C_n\} \cong D_n$
D_{nh}	n 为奇数		$G' = D_n \cup \{IR \mid R \in D_{2n}, R \notin D_n\} \cong D_{2n}$
	n 为偶数	$D_n \cup ID_n = D_n \otimes V_2$	
D_{nd}	n 为奇数	$D_n \cup ID_n = D_n \otimes V_2$	
	n 为偶数		$G' = D_n \cup \{IR \mid R \in D_{2n}, R \notin D_n\} \cong D_{2n}$
T_h		$T \cup IT = T \otimes V_2$	
T_d			$G' = T \cup \{IR \mid R \in O, R \notin T\} \cong O$
O_h		$O \cup IO = O \otimes V_2$	
Y_h		$Y \cup IY = Y \otimes V_2$	

§5.4 晶体点群

晶体点群: 所有保持晶体不变的转动与转动反演的集合构成的群

空间群: 所有保持晶体不变的转动, 转动反演与平移的集合构成的群

理想晶体由分子、离子或原子团在空间周期性重复排列而成。重复排列的最小单位称为**结构基元**。它可以是一个或多个分子、离子或原子团, 每个基元的化学组成及原子的空间排列完全相同。

将结构基元抽象为一个点, 则晶体中分子或原子的排列可看成**点阵**, 即: **晶体结构** = 基元 @ 点阵

点阵上的点称为**格点**或**阵点**;

用直线将格点连接成网络, 称为**晶格**。

晶格最小的周期单元称为**晶格原胞**, 简称**原胞**, 其不共面的三条棱 $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ 为描述晶格的基本矢量, 称为**晶格基矢**。

原胞的选取并不唯一, 但体积相同, 各含1个阵点;
能描述晶体最高对称性的最小重复单元称为**晶胞**, 其体积是原胞的整数倍, 含2, 3或4个阵点。

晶胞不共面的三条棱 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 称为**晶胞基矢**;

晶胞基矢的长度 a, b, c 及其夹角 α, β, γ 称为**晶胞参数**。

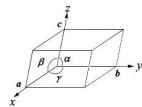
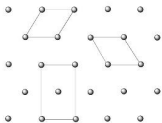
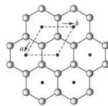
以任意格点为坐标原点, 点阵中格点的位置称为**晶格矢量** (**格矢**), 它们是晶格基矢的整数线性组合:

$$\vec{R}_n = n_1 \vec{l}_1 + n_2 \vec{l}_2 + n_3 \vec{l}_3 \quad (n_1, n_2, n_3 \text{ 为整数})$$

或是晶胞基矢的分数线性组合:

$$\vec{R}_n = f_1 \vec{a} + f_2 \vec{b} + f_3 \vec{c} \quad (f_1, f_2, f_3 \text{ 为分数或零})$$

理想晶体具有转动 (含转动反演) 和平移 (平移矢量为晶胞基矢) 对称性。



普通点群 $\longrightarrow$ 晶体点群

晶体制约定理 [晶体平移对称性对可能的晶体点群数目的限制]

晶体制约定理: 晶体中的 (固有或非固有) 转动轴只能是 1, 2, 3, 4 或 6 次的。

证: 设晶格 L 在群 G 的对称变换下不变, 晶格基矢为 $\vec{a}_i (i = 1, 2, 3)$, 则对任意 $R \in G$, 有

$$R\vec{a}_i = \sum_{j=1}^3 \vec{a}_j D_{ji}(R)$$

由于 $R\vec{a}_i$ 在 L 上, 故 R 的矩阵元素 $D_{ji}(R)$ 均为整数。

转角为 θ 的任意一转动、转动反演的矩阵迹为 $\pm(2 \cos \theta + 1)$ 。

于是

$$\sum_{i=1}^3 D_{ii}(R) = \pm(2 \cos \theta + 1) = \text{整数}$$

故

$$\cos \theta = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$$

即

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 0, \pi$$

$$\frac{2\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{1}, \frac{2\pi}{2}$$

命题得证。

$R\vec{a}_i$ 在 L 上: 晶体平移对称性的要求。

晶体点群 G 中的转动元素只能由 E, C_2, C_3, C_4, C_6 生成, 转动反演元素只能由 $IE, IC_2, IC_3, IC_4, IC_6$ 生成。

晶体制约定理限制晶体中允许的转动次数只能是1, 2, 3, 4, 6, 故**晶体点群**只有以下32种:

11种固有有点群:

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6, T, O$$

11种I型非固有有点群:

$$S_2, C_{2h}, S_6, C_{4h}, C_{6h}, D_{2h}, D_{3d}, D_{4h}, D_{6h}, T_h, O_h$$

— 10种P型非固有有点群:

$$C_{1h}, S_4, C_{3h}, C_{2v}, C_{3v}, C_{4v}, D_{2d}, C_{6v}, D_{3h}, T_d$$

$C_2 \approx S_2 \approx C_{1h},$	$C_4 \approx S_4,$	$C_6 \approx S_6 \approx C_{3h},$	$D_2 \approx C_{2h} \approx C_{2v},$
$D_3 \approx C_{3v},$	$D_4 \approx C_{4v} \approx D_{2d},$	$D_6 \approx C_{6v} \approx D_{3h},$	$O \approx T_d$

晶体学中, 晶体点群通常用**国际符号**来标记。

在国际符号系统中, 用不等价的转动轴和反射面来标记晶体的对称性: N 次转动轴用数字 N 标记, N 次转动反演轴用 $\bar{N}$ 标记, 过主轴的反射面用 m 表示, 垂直主轴的反射面用 $/m$ 表示。按不重复的原则, 标出为确定某一点群所需的最少数目的对称元素。

描述分子对称性 → 熊利符号	固有 点群	国际 符号	I 型非固 有点群	Schönflies 符号	国际 符号	P 型非固有点群	Schönflies 符号	国际 符号
描述晶体结构 → Hermann - Mauguin 符号	C_1	1	$C_1 \otimes V_2$	S_2	$\bar{1}$	$\{E, IR\} \approx C_2$	C_{1h}	m
	C_2	2	$C_2 \otimes V_2$	C_{2h}	$2/m$	$\{E, R^2, IR, IR^3\} \approx C_4$	S_4	$\bar{4}$
	C_3	3	$C_3 \otimes V_2$	S_6	$\bar{3}$	$\{E, R^2, R^4, IR, IR^3, IR^5\} \approx C_6$	C_{3h}	$\bar{6}$
	C_4	4	$C_4 \otimes V_2$	C_{4h}	$4/m$	$\{E, \sigma, I, \tau, I\sigma\} \approx D_2$	C_{2v}	mm
	C_6	6	$C_6 \otimes V_2$	C_{6h}	$6/m$	$\{E, D, F, IA, IB, IC\} \approx D_3$	C_{3v}	$3m$
	D_2	222	$D_2 \otimes V_2$	D_{2h}	mmm	$C_4 \cup \{IR \mid R \in D_{12}, R \notin C_4\} \approx D_4$	C_{4v}	$4mm$
	D_3	32	$D_3 \otimes V_2$	D_{3d}	$\bar{3}m$	$D_2 \cup \{IR \mid R \in D_6, R \notin D_2\} \approx D_4$	D_{2d}	$\bar{4}m2$
	D_4	42	$D_4 \otimes V_2$	D_{4h}	$4/mmm$	$C_6 \cup \{IR \mid R \in D_{18}, R \notin C_6\} \approx D_6$	C_{6v}	$6mm$
	D_6	62	$D_6 \otimes V_2$	D_{6h}	$6/mmm$	$D_3 \cup \{IR \mid R \in D_{18}, R \notin D_3\} \approx D_6$	D_{3h}	$\bar{6}m2$
	T	23	$T \otimes V_2$	T_h	$m\bar{3}$	$T \cup \{IR \mid R \in O, R \notin T\} \approx O$	T_d	$\bar{4}3m$
	O	432	$O \otimes V_2$	O_h	$m\bar{3}m$			

- 具有相同对称元素的点群使不同晶体有相似的宏观对称性, 将这些晶体称为一个晶系。比如, T, O, T_d, T_h, O_h 都有4个三次轴, 从宏观上看晶体的 x, y, z 轴等价, 将这类晶体都归为立方晶系。

- 依据32种晶体点对晶胞参数给出的限制, 将晶体分为7种晶系:

- 三斜晶系:
无对称轴、对称面, 对应点群 $C_1, S_2 (C_i)$
 $a \neq b \neq c, \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$
- 单斜晶系:
有一个二次轴或对称面, 对应点群 $C_2, C_{2h} (C_i), C_{2v}$
 $a \neq b \neq c, \alpha = \gamma = 90^\circ, \beta \neq 90^\circ, \alpha = b \neq c$
- 正交晶系:
有三个二次轴, 对应点群 D_2, C_{2v}, D_{2h}
 $a \neq b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
- 四方晶系:
有一个四次轴, 对应点群 $C_4, D_2, C_{4h}, S_4, C_{6h}, D_{2d}, D_{4h}$
 $a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
- 三方晶系:
有一个三次轴, 对应点群 $C_3, D_3, S_6, C_{3v}, C_{3h}, D_{3d}$
或
 $a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ, \alpha = b \neq c$
- 六方晶系:
有一个六次轴, 对应点群 $C_6, D_2, C_{6h}, C_{3h}, C_{2v}, D_{3h}, D_{6h}$
 $a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ, \gamma = 120^\circ, a = b \neq c$
- 立方晶系:
有四个三次轴, 对应点群 T, O, T_d, T_h, O_h
 $a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$

7种晶系, 32种晶体点群
7种晶系对应14种Bravais格子, 230种空间群

7种晶系	32种晶体点群	14种Bravais格子	7种晶格系统
三斜	C_1, S_2	1种	三斜
单斜	C_2, C_{2h}, C_{2v}	2种	单斜
正交	D_2, C_{2v}, D_{2h}	4种	正交
四方	$C_4, D_4, C_{4h}, S_4, C_{6h}, D_{2d}, D_{4h}$	2种	四方
三方	$C_3, D_3, S_6, C_{3v}, D_{3d}$	1种	菱方
六方	$C_6, D_6, C_{6h}, C_{3h}, C_{2v}, D_{3h}, D_{6h}$	1种	六方
立方	T, O, T_h, T_d, O_h	3种	立方

晶格系统	三斜	单斜	正交	四方	菱方	六方	立方
Bravais格子	简单						
	底心						
	体心						
	面心						

§5.5 晶体点群的不可约表示 (特征标表)

直积群 $G = G_1 \otimes G_2$ 的所有不等价不可约表示, 可以由 G_1 与 G_2 的不等价不可约表示给出.

点群分为三种情况: 纯转动 $G = K$, 纯转动与 $\{E, I\}$ 的直积 $G = K \cup IK$

与某个纯转动同构的不含反演 I 的第二类点群 $G \cong G^+ = K \cup K^+ \quad K^+ = \{I g | g \in G, g \neq k\}$

$\Rightarrow$ 第一类点群 (11种) 的不等价不可约表示.

① $C_n \quad n=1, 2, 3, 4, 6$

n 阶循环群 $\Rightarrow n$ 个类 $\Rightarrow n$ 个不等价不可约表示. $\chi^p(a) = \exp[(p-1)2\pi i/n] \quad p=1, 2, \dots, n.$

② $D_2 = C_2 \otimes G = \{e, a\} \otimes \{e, b\}.$

由 G 的两个一维不可约表示

	$e(ee)$	$a(ac)$	$b(eb)$	$c(ab)$
1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1

构造直积群的不等价表示.

③ $D_3 \quad D_3/C_3 = C_2$

商群 G 的不可约表示 $\rightarrow A^+$

正交定理 $\rightarrow$ 二维 A^+

	$1\{e\}$	$2\{d\}$	$3\{a\}$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
A_3	2	-1	0

④ $D_4 \quad$ 不变群 $\{E, C_4, C_4^2, C_4^3\}, \{E, C_2, C_2^{(1)}, C_2^{(2)}\}, \{E, C_2, C_2^{(1)}, C_2^{(2)}\}. \quad D_4/H = C_2$

D_4 到 G 的三个同态

$\rightarrow$ 3个一维非恒等表示 A_2, A_3, A_4

正交关系 $\rightarrow$ 二维 A_5

	$1\{E\}$	$1\{C_4^2\}$	$2\{C_4\}$	$2\{C_2^{(1)}\}$	$2\{C_2^{(2)}\}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
A_3	1	1	-1	1	-1
A_4	1	1	-1	-1	1
A_5	2	-2	0	0	0

⑤ $D_6 = D_3 \otimes \{E, C_2\}$

⑥ T 群 不变子群 $H = \{E, C_3^{(1)}, C_3^{(2)}, C_3^{(3)}\}$ $T/H \cong G$.

商群 G_3 的 3-维表示 A_1, A_2, A_3

正交关系 $\rightarrow$ 3-维 A_4

	$\{E\}$	$3\{C_3^{(1)}\}$	$4\{C_2\}$	$4\{C_3^{(2)}\}$
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	ε	ε^2
A_3	1	1	ε^2	ε
A_4	3	-1	0	0

⑦ O 群 不变子群 $T = \{E, C_3, C_3^2, C_3^3, C_3^4, C_3^5, C_3^6, C_3^7, C_3^8, C_3^9, C_3^{10}, C_3^{11}, C_3^{12}, C_3^{13}, C_3^{14}, C_3^{15}\}$. $O/T \cong G$

由商群 G 得到

由子群 T 表示

给出诱导表示

	$\{E\}$	$6\{C_4\}$	$3\{C_2^{(2)}\}$	$8\{C_2\}$	$6\{C_3^{(1)}\}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	-1	1	1	-1
A_3	2	0	2	-1	0

3-维

198

由群 T 3-维表示

给出诱导表示

A_4	3	$\chi^4(C_4) \mathbf{1}$	$\chi^4(C_2^{(2)}) \mathbf{-1}$	$\chi^4(C_2) \mathbf{0}$	$\chi^4(C_3^{(1)}) \mathbf{-1}$
A_5	3	$\chi^5(C_4) \mathbf{-1}$	$\chi^5(C_2^{(2)}) \mathbf{-1}$	$\chi^5(C_2) \mathbf{0}$	$\chi^5(C_3^{(1)}) \mathbf{1}$

3-维.

诱导表示的特征标 $\chi^u(g) = \frac{1}{m} \sum_{t \in O} \text{tr } B(tgt^{-1})$

$$m = |T|$$

第六章 置换群

① 真实的物理系统拥有置换对称性, eg. 全同粒子系统

② 置换理论中的计算符方法在近代物理中的应用

③ 凯莱定理: 所有有限群同构于置换群的子群.

§6.1 n 阶置换群

置换定义: n 个数字的排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 变换为 $b_1, b_2, \dots, b_n$
$$s = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_n & \dots & a_2 \\ b_1 & b_n & \dots & b_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 置换群 S_n 群乘法定义为 rs = 先执行置换 s , 再执行置换 r , 共有 $n!$ 个置换

轮换定义: 特殊置换 $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_m \\ e_2 & e_3 & \dots & e_1 \end{pmatrix} = (e_1 e_2 \dots e_m)$ 轮换的阶 m 为轮换数字的个数

性质 ① 数码轮换 $\rightarrow$ 轮换不变

② 相互独立(无公共数码)的轮换之间满足交换律.

③ 任意 n 阶置换总可以分解为相互独立的轮换乘积, 各轮换长度的集合

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{(145)(2)(36)} \quad \hookrightarrow \text{轮换结构}$$

④ 逆轮换

对换定义: 二阶轮换 $(e_1 e_2)$ 任意一个 m 阶轮换都可以写为 $m-1$ 个对换乘积 $\Rightarrow$ 相邻对换.

$$(1, 3) = (2, 3)(1, 2)(2, 3)$$

$\Rightarrow$ 任意一个置换可分解为相邻对换的乘积.

定理 6.1 具有相同轮换结构的置换构成置换群的一个类 [类与轮换结构一一对应].

关联变换: $tst^{-1} = t$ 对 s 的上下两行同时作置换.

轮换分解 $(r) = (1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n})$ 指此类置换中有 r_1 个一阶轮换, r_2 个二阶轮换 $\dots$

$$\sum_{i=1}^n i r_i = 1 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 + \dots + n \cdot r_n = n$$

(r) 类中置换群元个数为 $\frac{n!}{(1^{r_1} r_1!)(2^{r_2} r_2!)\dots(n^{r_n} r_n!)}$

杨图定义 $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ $\lambda_1 = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$; $\lambda_2 = Y_2 + \dots + Y_n$; $\dots$; $\lambda_n = Y_n$

满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n$ 第 i 行在左对齐有 λ_i 个格子且 $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$

§6.2 杨盘及其引理. 杨盘 $\Rightarrow$ 置换群的不等价不可约表示.

杨盘定义: 数字 $1, 2, \dots, n$ 分别填到 S_n 杨图的 n 个方格中得到

一个杨图有 $n!$ 个杨盘 (有序列从左到右从上到下) 通过一个置换相互转换.

$\Rightarrow$ 行置换: 保持杨盘 T 的各行中的数字还在其相对行上的置换 $\hat{p} [R(T)]$

列置换: 保持杨盘 T 的各列中的数字还在其相对列上的置换 $\hat{q} [C(T)]$ } S_n 子群, 交集仅有 (1)

$\Rightarrow$ 行置换算符 $\hat{P}(T) = \sum_{\hat{p} \in R(T)} \hat{p}$ 列置换算符 $\hat{Q}(T) = \sum_{\hat{q} \in C(T)} \delta_{\hat{q}} \hat{q}$

杨算符定义: $\hat{E}(T) = \hat{P}(T) \hat{Q}(T) = \sum_{\hat{p} \in R(T)} \sum_{\hat{q} \in C(T)} \delta_{\hat{q}} \hat{p} \hat{q}$

性质 ① $\hat{p}, \hat{p}' \in R(T), \hat{q}, \hat{q}' \in C(T)$ 且 $\hat{p}\hat{q} = \hat{p}'\hat{q}'$ 则 $\hat{p} = \hat{p}', \hat{q} = \hat{q}'$ (基知推一)

② $\hat{E}(T)$ 是非零的群空间中的向量

幂等元定义: 群代数 R_G 中满足 $\hat{e} = \hat{e}^2$ 的元素 $\Rightarrow$ 本原幂等元 $\hat{e} = \lambda \hat{e}$ 本原幂等元与不可约表示对应

定理 6.2-6.3 群代数 R_G 中的幂等元与群空间中 对左正则变换 $L(g)$ 不变的子空间 及其投影算符一一对应

定理 6.4 杨盘定理

(1) 杨盘 T 的杨算符 $\hat{E}(T)$ 可给出置换群群空间 R_{S_n} 中的一个本原幂等元 $\hat{E}(T)/\theta$ ($\theta = \text{const.}$)

$\hookrightarrow$ 置换群在群空间 R_{S_n} 中的一个不可约表示.

(2) 同一个杨图的不同杨盘给出的不可约表示相等

(3) 不同杨图的杨盘给出的不可约表示不等价.

$\Rightarrow$ 一个置换群的不等价不可约表示数等于其杨图的个数 利用杨盘得到置换群的不等价表示.

标准盘定义：杨盘中每行每列，数字从左到右从上到下都逐渐增加的盘

定理 6.5 杨图 $[n]$ 对应的不可约表示的维数 = 标准盘个数

例：三阶值环群 C_3

1° 杨图 $[n]$	$[3]$	$[2, 1]$	$[1^3]$
2° 标准盘			
对应不可约表示维数	1维	2维	1维

Burnside 定理 $1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$

3° 求解不可约表示 以杨图 $[2, 1]$ 为例

$R(T) = \{(1), (1, 2)\}$ $C(T) = \{(1), (1, 3)\}$
 $\hat{E}(T) = \{(1) + (1, 2)\} \{(1) - (1, 3)\} = (1) + (1, 2) - (1, 3) - (1, 3, 2)$

不变子空间 $R_{S_3} \hat{E}(T)$ 是置换群 S_3 的一个不可约表示空间，维数为 2. R_{S_3} 为群代数

$\Rightarrow$ 确定表示空间的基矢

$(1) \hat{E}(T) = (1) + (1, 2) - (1, 3) - (1, 3, 2) = \hat{E}(T)$	} 两个基为 $\hat{E}(T), (1, 3) \hat{E}(T)$
$(1, 2) \hat{E}(T) = (1, 2) + (1) - (1, 3, 2) - (1, 3) = \hat{E}(T)$	
$(1, 3) \hat{E}(T) = (1, 3) + (1, 2, 3) - (1) - (2, 3)$	
$(2, 3) \hat{E}(T) = -\hat{E}(T) - (1, 3) \hat{E}(T)$	
$(1, 2, 3) \hat{E}(T) = (1, 3) \hat{E}(T)$	
$(1, 3, 2) \hat{E}(T) = -\hat{E}(T) - (1, 3) \hat{E}(T)$	

表示矩阵 $(1, 3, 2) \hat{E}(T) = -\hat{E}(T) - (1, 3) \hat{E}(T)$ $D[(1, 3, 2)] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
 $(1, 3, 2) (1, 3) \hat{E}(T) = \hat{E}(T)$

所有与 D_3 相关的内容: [参考新征]

①定义: 正三角形的所有对称变换的集合构成 D_3 群

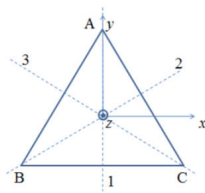
e -恒等变换

d -绕 z 轴转 $\frac{2}{3}\pi$ f -绕 z 轴转 $\frac{4}{3}\pi$

a -绕 1 轴翻转(转 π) b -绕 2 轴翻转(转 π) c -绕 3 轴翻转(转 π)

置换表示下 $e = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$ $d = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ $f = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$

$a = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$



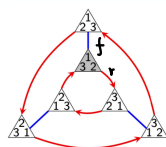
②乘法表. $g_i \cdot g_j$

	e	d	f	a	b	c
e	e	d	f	a	b	c
d	d	f	e	c	a	b
f	f	e	d	b	c	a
a	a	b	c	e	d	f
b	b	c	a	f	e	d
c	c	a	b	d	f	e

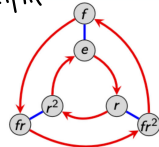
记忆:

前三列第一个到最后一个

后三列最后一个到第一个



右作用



循环子群.

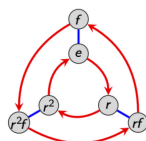
③各元素的周期与阶

生成元 $d/f + a/b/c$

e : 1阶元素, 周期为 $\{e\}$

d, f : 3阶元素, 周期为 $\{e, d, f\}$

a, b, c : 2阶元素, 周期为 $\{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\}$



e 恒等作用

r 绕 z 轴旋转 120°

r^2 绕 z 轴旋转 240°

f 沿 z 轴翻转

rf, r^2f

④ D_3 是最简单的非阿贝尔群

③ D_3 的非平庸子群

$$\{e, d, f\}, \{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\} / \{e\}, G$$

阶 3 2 2 2 1 6 都是群阶(16)的因子 — 拉格朗日定理

④ D_3 的不变子群 $\{e, d, f\}$ 左陪集/右陪集 $\{a, b, c\}$.

$$\text{子群 } \{e, a\} \quad \text{左 } \{d, c\}, \{f, b\} \quad \text{右 } \{d, b\}, \{f, c\}$$

$$\text{子群 } \{e, b\} \quad \text{左 } \{d, a\}, \{f, c\} \quad \text{右 } \{d, c\}, \{a, f\}$$

$$\text{子群 } \{e, c\} \quad \text{左 } \{d, b\}, \{f, a\} \quad \text{右 } \{d, a\}, \{f, c\}$$

⑤ D_3 的商群 G/H (其中 H 为不变子群 $\{e, d, f\}$)

$$G = H \cup aH = \{e, d, f, a, b, c\}$$

$$G/H \simeq \mathbb{Z}_2 = \left\{ \begin{matrix} e \\ a \end{matrix} \right\}$$

寻找有限群类和不变子群的步骤:

先确定每个元素的阶数, 在阶数相同的元素中判断其是否共轭, 从而找到所有共轭类。

把若干个类并起来, 判断其是否构成子群, 若是子群, 则定是不变子群。

判断若干个类的集合是否构成子群的一般步骤: 逐步检查是否包含恒元, 元素的数目是否是群阶数的因子, 是否包含每一元素的完整周期, 是否满足乘积的封闭性。

⑥ D_3 的类 $\{e\}, \{d, f\}, \{a, b, c\}$.

包含 1 个 3 次轴 (双向轴) 和 3 个 2 次轴且相互等价 (通过绕 3 次轴的转动关联)

$$\{d, f\} \text{ 绕 3 次轴正、反转 } \frac{2\pi}{3} \quad \{a, b, c\} \text{ 转 } \frac{\pi}{2}$$

⑦ D_3 与二阶循环群 C_2 同态 $\{e, d, f\} \rightarrow e(-1) \quad \{a, b, c\} \rightarrow a(-1)$

利用同态核定理, 同态核 $H = \{e, d, f\}$ 是 D_3 的不变子群

商群 D_3/H 同构于 C_2

⑩ D_3 群是变换对象为平面三角形三顶点的对称群 (仅转动)

A 是变换对象 X 中的一个元素, 其逆子群为 $\{e, a\}$ $e(A) = a(A) = A$

左陪集 $b\{e, a\} = \{b, f\}$ 有 $b(A) = C$.

$c\{e, a\} = \{c, d\}$ 有 $c(A) = B$

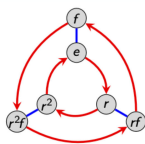
利用轨道稳定子定理 $n=b, m=2$, 故 A 的 D_3 轨道中有 $n/m=3$ 个元素 $\{A, B, C\}$

D_3 本身作为变换对象集合 $X = \{e, r, r^2, f, fr, fr^2\}$.

r 的轨道为 $\{e, r, r^2\}$ (r^2)

f 的轨道为 $\{e, f\}$. rf 的轨道为 $\{e, rf\}$, r^2f 的轨道为 $\{e, r^2f\}$

e 的轨道为 $\{e\}$



轨道长度: 元素 g 的阶, 轨道 $(g) := \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$

⑪ D_3 群是不变子群 $G_1 = \{e, d, f\}$ 和子群 $G_2 = \{e, a\}$ 的半直积群

G_1 的自同构群 $A(G_1) = \{Ve, Va(d \leftrightarrow f)\}$ 同构于 G_2 ,

半直积群 $\{ \langle ee \rangle \equiv e, \langle ea \rangle \equiv a, \langle de \rangle \equiv d, \langle da \rangle \equiv c, \langle fe \rangle \equiv f, \langle fa \rangle \equiv b \}$.

e.g. $cb \equiv \langle da \rangle \langle fa \rangle = \langle dVa(f)aa \rangle = \underline{\underline{\langle ddaa \rangle}} = \underline{\underline{\langle fe \rangle}}$

群表示论 - D_3

- 维恒等表示 $D(e) = D(d) = D(f) = D(a) = D(b) = D(c) = I$

- 维非恒等表示 $D(e) = D(d) = D(f) = I \quad D(a) = D(b) = D(c) = -I$

= 维表示 ($x-y$ 平面内坐标变换)

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D(d) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad D(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D(b) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad D(c) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

= 维表示 ($x-y-z$ 坐标系内坐标变换 / 函数空间) -----

其中 $x-y-z$ 坐标系内坐标变换 $D(d) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

函数基 $\psi_1 = x^2 \quad \psi_2 = xy \quad \psi_3 = y^2$

$$D(d) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 3 \\ -2\sqrt{3} & -2 & 2\sqrt{3} \\ 3 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\psi_1 = x^2 + y^2 \quad \psi_2 = 2xy \quad \psi_3 = x^2 - y^2$

$$D(d) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

} 不等价

} 等价

① D_3 群的左正则表示和右正则表示

	e	d	f	a	b	c
e	e	d	f	a	b	c
d	d	f	e	c	a	b
f	f	e	d	b	c	a
a	a	b	c	e	d	f
b	b	c	a	f	e	d
c	c	a	b	d	f	e

$$D(d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\chi(e) = 6$

$$\bar{D}(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{D}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{D}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② D_3 群的不等价不可约表示 Burnside 定理: 群阶 $n = \sum_p s_p^2$ $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$

共有两个一维表示 $D^{(1)}, D^{(2)}$, 一个二维表示 $D^{(3)}$

表示矩阵形式	e	d	f	a	b	c
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	1	-1	-1	-1
$D^{(3)}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\chi = \exp(i\frac{2\pi}{3})$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \chi & 0 \\ 0 & \chi^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \chi^2 & 0 \\ 0 & \chi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \chi^2 \\ \chi & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \chi \\ \chi^2 & 0 \end{pmatrix}$

表示矩阵形式	e	d	f	a	b	c
$D_{11}^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$D_{11}^{(2)}$	1	1	1	-1	-1	-1
$D_{11}^{(3)}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$D_{12}^{(3)}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$D_{21}^{(3)}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$D_{22}^{(3)}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

特征标表	1 {e}	2 {d, f}	3 {a, b, c}	(n_m m 为类指标)
χ^1	1	1	1	
χ^2	1	1	-1	
χ^3	2	-1	0	

验证正交性: $\sum_{i=1}^n (A_{\mu\nu}^p(g_i))^* A_{\mu\nu}^r(g_i) = \frac{n}{s_p} \delta_{pr} \delta_{\mu\nu}$

$$\langle \chi^p | \chi^r \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi^{p*}(g_i) \chi^r(g_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n n_i \chi^{p*}(K_i) \chi^r(K_i) = \delta_{pr}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n n_i \chi^{p*}(K_i) \chi^p(K_j) = \delta_{ij}$$

验证完备性 类的个数 = 不等价不可约表示的个数. (3) 有限群表示不可约 $\Leftrightarrow \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = n$

③ D_3 群的直积表示 $A^1 \otimes A^3 \quad 2; 1; 0 \quad \text{与 } A^3 \text{ 等价, 不可约}$

$A^2 \otimes A^3 \quad 2; -1; 0 \quad \text{与 } A^3 \text{ 等价, 不可约}$

$A^1 \otimes A^2 \quad 1; 1; -1 \quad \text{与 } A^2 \text{ 等价, 不可约}$

$A^3 \otimes A^3 \quad 4; 1; 0 \quad \text{可约化为 } A^1 \otimes A^2 \otimes A^3$

④ D_3 群的诱导表示. $G = D_3 = \{e, d, f, a, b, c\} \quad H = \{e, d, f\}$ 为 3 阶循环群

由 H 的表示 $B(e) = 1, B(d) = \varepsilon = \exp[i\frac{2\pi}{3}], B(f) = \varepsilon^2 = \exp[i\frac{4\pi}{3}]$ 诱导出 D_3 的表示

利用子群 H 和陪集划分 $D_3 \quad G = \{H g_1, H g_2\} \quad g_1 = e \quad g_2 = a \quad i, j = 1, 2$

诱导表示的表示矩阵 $U^B(g) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(g g_1 g_1^{-1}) & \tilde{B}(g g_2 g_1^{-1}) \\ \tilde{B}(g g_1 g_2^{-1}) & \tilde{B}(g g_2 g_2^{-1}) \end{pmatrix}$ 其中 $\tilde{B}(g g_i g_j^{-1}) = \begin{cases} B(g g_i g_j^{-1}) & g_i g_j g_i^{-1} \in H \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$

$$U^B(e) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(e e e^{-1}) & \tilde{B}(e e a^{-1}) \\ \tilde{B}(e a e^{-1}) & \tilde{B}(e a a^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(e) & 0 \\ 0 & B(e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^B(d) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(d e d^{-1}) & \tilde{B}(d e a^{-1}) \\ \tilde{B}(d a d^{-1}) & \tilde{B}(d a a^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(d) & 0 \\ 0 & B(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$U^B(f) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(f e f^{-1}) & \tilde{B}(f e a^{-1}) \\ \tilde{B}(f a f^{-1}) & \tilde{B}(f a a^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(f) & 0 \\ 0 & B(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$U^B(a) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(a e a^{-1}) & \tilde{B}(a e a^{-1}) \\ \tilde{B}(a a e^{-1}) & \tilde{B}(a a a^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(e) \\ B(e) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U^B(b) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(b e b^{-1}) & \tilde{B}(b e a^{-1}) \\ \tilde{B}(b a b^{-1}) & \tilde{B}(b a a^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(f) \\ B(f) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$U^B(c) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(c e c^{-1}) & \tilde{B}(c e a^{-1}) \\ \tilde{B}(c a c^{-1}) & \tilde{B}(c a a^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(d) \\ B(d) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix}$$

	e	d	f	a	b	c
e	e	d	f	a	b	c
d	d	f	e	c	a	b
f	f	e	d	b	c	a
a	a	b	c	e	d	f
b	b	c	a	f	e	d
c	c	a	b	d	f	e

⑤ D_3 的诱导表示 / 在 $H = C_3$ 上的缩小.

对于 D_3 的 B 诱导表示 U^B , 它是一个 D_3 的不可约表示

$(\chi^U | \chi^U) = \frac{1}{6} (1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 0) = 1$ 即 A^1, A^2, A^3 在 U^B 上的重复度分别为 0, 0, 1

A^1, A^2 在 $H = \{e, d, f\}$ 上的缩小为 $\tilde{A}^1_H(e) = \tilde{A}^2_H(d) = \tilde{A}^1_H(f) = 1$

$(\chi^B | \chi^{A^H}) = \frac{1}{3} (1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot \varepsilon + 1 \cdot 1 \cdot \varepsilon^2) = 0 \quad A^H$ 在 B 上的重复度都为 0

$$A^3 \text{ 在 } H \text{ 上的缩小 } A^3|_H(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3|_H(d) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \quad A^3|_H(f) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$(\chi^B | \chi^{AH}) = \frac{1}{3} (1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (\varepsilon + \varepsilon^2) \cdot \varepsilon + 1 \cdot (\varepsilon^2 + \varepsilon) \cdot \varepsilon^2)$$

$$= \frac{1}{3} (2 - \varepsilon - \varepsilon^2) = 1$$

$A^3|_H$ 在 B 上的重复度都为 0

$\Rightarrow$ Frobenius 定理成立.

D_3 的置换形式

$$\textcircled{1} \text{ 三类对应的轮换结构 } \{e\} \ (1^3) \quad \{r, r^2\} \ (3') \quad \{f, fr, fr^2\} \ (1', 2')$$

李群部分复习

$SU(N)$ 性质 $U^\dagger U = I$ 生成元个数 $N^2 - 1$ 群元 $U = \exp(i \frac{1}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{\sigma})$
 $SO(N)$ 性质 $R^T R = I$ 生成元个数 $\frac{1}{2} N(N-1)$ 群元 $R = \exp(i \vec{\theta} \cdot \vec{J})$ } 李代数 $[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k$

特征标 $\chi(j, \psi) = \sum_{m=-j}^j e^{im\psi} = e^{ij\psi} + e^{i(j-1)\psi} + \dots + e^{-ij\psi} = \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi}$

正交性 $\int_0^{2\pi} d\psi \chi^*(k, \psi) \chi(j, \psi) = \int_0^{2\pi} d\psi \left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^2 \frac{\sin(k+\frac{1}{2})\psi \sin(j+\frac{1}{2})\psi}{\left(\sin\frac{1}{2}\psi\right)^2} = \frac{\pi}{2} \delta_{jk}$

$SU(2)$ 与 $SO(3)$ 之间的 2-1 映射

$\forall \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

考虑一个厄米无迹矩阵 $X = \vec{x} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \quad \det X = -|\vec{x}|^2$

$\forall U \in SU(2)$ 令 $X' = U^\dagger X U$ 同样也是一个厄米无迹矩阵

有 $X' = \vec{x}' \cdot \vec{\sigma} \quad \det X' = -|\vec{x}'|^2 = \det X = -|\vec{x}|^2$ 即 $\vec{x}'$ 与 $\vec{x}$ 线性相关且长度相等 $\vec{x}' = R \vec{x}$

① 映射 $U \mapsto R$ 保群乘法 $(U_1, U_2)^\dagger X (U_1, U_2) = U_2^\dagger (U_1^\dagger X U_1) U_2 = U_2^\dagger X' U_2 = X''$

对应 $\vec{x} \longrightarrow \vec{x}' = R_1 \vec{x} \longrightarrow \vec{x}'' = R_2 \vec{x}'$

② $f: SU(2) \rightarrow SO(3)$ 是 2 到 1 的 $f(U) = f(-U)$

角动量耦合与 C-G 系数分解

(1) 以 $|s=1, m=\pm 1, 0\rangle, |s=0, m=0\rangle$ 与 $|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle$ 为例

$|s=1, m=1\rangle = |+, +\rangle$ 应用降算符 $S_- \equiv S_{1-} + S_{2-} = (S_{1x} - i S_{1y}) + (S_{2x} - i S_{2y})$

$S_- |s=1, m=1\rangle = (S_{1-} + S_{2-}) |+, +\rangle \quad \text{由 } J_- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1)(j-m)(j-m-1)} |j, m-1\rangle$

$\sqrt{(1+1)(1-1+1)} |s=1, m=0\rangle = \sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)} |-, +\rangle + \sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)} |+, -\rangle$

$|s=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-, +\rangle + |+, -\rangle)$

$\Rightarrow |s=1, m=-1\rangle = |-, -\rangle$

$\Rightarrow$ 表基矢之间的正交性要求 $|s=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, -\rangle - |-, +\rangle)$

12) 一般角动量耦合中的CG系数递推关系

$$J_{\pm} |j_1 j_2; j m\rangle = (J_{1\pm} + J_{2\pm}) \sum_{m_1} \sum_{m_2} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m\rangle \quad m_1 \rightarrow m_1' \quad m_2 \rightarrow m_2'$$

$$J_{\pm} = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j_1 j_2; j, m \pm 1\rangle \quad \langle j_1 j_2; m_1' m_2' | j_1 j_2, j m\rangle$$

$$J_{\pm} = \sum_{m_1'} \sum_{m_2'} \left(\sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} |j_1 j_2; m_1' \pm 1, m_2'\rangle + \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)} |j_1 j_2; m_1', m_2' \pm 1\rangle \right)$$

作用 $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 |$ 对第一项要求 $m_1 = m_1' \pm 1 \quad m_2 = m_2'$ 对第二项要求 $m_1 = m_1' \quad m_2 = m_2' \pm 1$

$$\begin{aligned} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j, m \pm 1\rangle &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; j m\rangle \\ &+ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; j m\rangle \end{aligned}$$



第一章课后习题:

1. 证明只有一个三阶群

设三阶群 $G = \{e, a, b\}$, 乘法表

由重排原理, 表中每一行/列有且仅有

一次给出完整的群元序列

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a^2 /b	e
b	b	a /e	a

$\Rightarrow G_3$ 群.

2. 证明两个子群的交集是子群

设 H_1, H_2 为群 G 的两个子群 $H = H_1 \cap H_2$

$\forall h_1, h_2 \in H$ 则 $h_1, h_2 \in H_1$ 且 $h_1, h_2 \in H_2$

由子群性质 $h_1 h_2 \in H_1, h_1 h_2 \in H_2 \Rightarrow h_1 h_2 \in H = H_1 \cap H_2$. 满足封闭性.

$h_1^{-1} \in H_1, h_1^{-1} \in H_2 \Rightarrow h_1^{-1} \in H = H_1 \cap H_2$ 满足存在逆元素

} H 为 G 的子群.

3. 证明有两个四阶群, 且都是 Abel 群.

Lagrange 定理 子群的阶必定为 1, 2, 4 设 $G = \{e, a, b, c\}$ 中 a 的阶数最高

a 的阶 = 1 X

a 的阶 = 2 $a^2 = e, b^2 = c^2 = e$

$ab = c = ba, ca = b = ac$

是 Abel 群.

a 的阶 = 4 $b = a^2, c = a^3, e = a^4$ 是 C_4 且 Abel

e a b c

e e a b c

a a e c b

b b c e a

c c b a e

若 $a^2 = e$ 与假设矛盾.

4. 群 $G = \{1, i, -1, -i\}$ 非平庸子群 $H = \{1, -1\}$

$i\{1, -1\}i = \{-1, 1\}$ $(-i)\{1, -1\}(-i) = \{-1, 1\}$ 故 $H = \{1, -1\}$ 是不变子群.

商群为 $G/H = \{H, iH\}$.

5. 矩阵群由 $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 生成

$$a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = c \quad b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e$$

$$ac = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = d$$

$$ad = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e$$

$$ab = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = f$$

$$fa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = b \quad fb = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = a$$

$$cb = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = d$$

$$db = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = h.$$

矩阵群 $G = \{a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

关系 $\{e\} \quad a a a^{-1} = a, b a b^{-1} = d, c a c^{-1} = a, d a d^{-1} = a, f a^{-1} f = d, g a g^{-1} = d, h a h^{-1} = d$

$$\Rightarrow \{a, d\}, \{b, g\}, \{h, f\}, \{c\}.$$

6. $D_3 = \{e, a, b, c, d, f\}$ 子群 $\{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\}, \{e, d, f\}, \{e\}, D_3$

不变子群 $\{e\}, \{e, d, f\}, D_3$

7. 证明不是子群本身的陪集不包含子群的元, 且不是群

对群 G 的子群 H , 其陪集为 $g_i H$, ($g_i \neq e$ 且 $g_i \notin H$). 设 $g_i H$ 中包含子群 H 的元素 $h' = g_i h \in H$ $h \in H$, $h' \in H$
则 $g_i = h' \cdot h^{-1} \in H$ 与条件矛盾. 陪集无法保证存在逆元 $(g_i h)^{-1} = h^{-1} g_i^{-1}$ 故 $g_i H$ 不是群.

8. 可以如 D_3

9. 证明除恒元外其它所有元都是二阶的群是 Abelian 群

设 $G = \{e, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 满足 $a_i^2 = e$ $i=1, 2, \dots, n$ $e a_i = a_i e$ 且 $a_i^{-1} = a_i$

反证法: 如果 G 非 Abelian, 则 $a_i a_j \neq a_j a_i$. $a_i a_j \in G$ 故 $e = (a_i a_j)^2 = a_i a_j a_i a_j = a_i (a_j a_i) a_j$

左乘 a_i^{-1} 右乘 a_j^{-1} $a_j a_i = a_i^{-1} a_j^{-1} = a_i a_j$ 与假设矛盾.

10. 不构成群. 需添加一个矩阵 $c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 以保证封闭性 Abelian 群各元素自成一类.

11. $f_1(x) = x$ $f_2(x) = 1-x$ $f_3(x) = \frac{x}{x-1}$ $f_4(x) = \frac{1}{x}$ $f_5(x) = \frac{1}{1-x}$ $f_6(x) = \frac{x-1}{x}$

以这些函数的集合作为乘法构成群, 同构于 D_3

封闭性, 结合律, 单位元, 唯一逆

12. C_i 为群的一个类, 则其中元素相互共轭 $\forall g_i, g_j \in C_i, \exists g \in G$ s.t. $g g_i g^{-1} = g_j$

两边同取逆 $g g_i^{-1} g^{-1} = g_j^{-1}$ 即 g_i^{-1}, g_j^{-1} 共轭且同属 C_i^*

由 g_i, g_j 的任意性可知 C_i^* 也是一类

16. 两个元素 A, B 生成群 $A^2 = B^k = (AB)^2 = E$ k 为大于1的有限整数.

此群 G 有循环子群 $G_1 = \{E, B, B^2, B^3, \dots, B^{k-1}\}$ 相应陪集 $AG_1 = \{A, AB, AB^2, \dots, AB^{k-1}\}$

$$G_2 = \{E, A\}$$

生成的群 $G = G_2 \cup G_1 \cup AG_1$ 满足封闭性, 结合律, 单位元, 唯一逆

17. D_3 的自同构群 (群 G 到自身的同构映射, 且保持乘法不变)

由6个自同构映射组成 $\Phi_1 = \begin{pmatrix} e & a & b & c & d & f \\ e & a & b & c & d & f \end{pmatrix}$ $\Phi_2 = \begin{pmatrix} e & a & b & c & d & f \\ e & a & c & b & f & d \end{pmatrix}$

$\{e\} \rightarrow \{e\}$ $\{d, f\} \rightarrow \{d, f\}$ $\Phi_3 = \begin{pmatrix} e & a & b & c & d & f \\ e & c & b & a & f & d \end{pmatrix}$ $\Phi_4 = \begin{pmatrix} e & a & b & c & d & f \\ e & b & a & c & f & d \end{pmatrix}$

$\{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c\}$ $\Phi_5 = \begin{pmatrix} e & a & b & c & d & f \\ e & b & c & a & d & f \end{pmatrix}$ $\Phi_6 = \begin{pmatrix} e & a & b & c & d & f \\ e & c & a & b & d & f \end{pmatrix}$

内自同构群 $I(G)$ [作 ugu^{-1} 操作 $\forall u \in G$] 是自同构群 $A(G)$ 的不变子群

对 D_3 群整体利用 e, a, b, c, d, f 作相似变换, 根据重排原理仍为 D_3 , 为内自同构映射

等价于 $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6$ 故 $I(G) = A(G)$.

18. 设群只有一个阶为2的元素 h , 令 $k = ghg^{-1} \in G$ $h^2 = e \quad \forall g \in G$

$k^2 = (ghg^{-1})(ghg^{-1}) = g h (g^{-1}g) h g^{-1} = e$. 故 $k = h$ 即 $gh = hg \quad \forall g \in G$.

19. D_4 中子群 $G_1 = \{e, r, r^2, r^3\}$, $G_2 = \{e, a\}$ $D_4 = \{e, r, r^2, r^3, a, ra, r^2a, r^3a\}$

G_1 的自同构群 $A(G_1) = \{\Phi_1, \Phi_2\}$ $\Phi_1 = \begin{pmatrix} e & r & r^2 & r^3 \\ e & r & r^2 & r^3 \end{pmatrix}$ $\Phi_2 = \begin{pmatrix} e & r & r^2 & r^3 \\ e & r^3 & r^2 & r \end{pmatrix}$

G_2 与 $A(G_1)$ 之间可以构造同态 $\begin{pmatrix} e & a \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{pmatrix}$

定义有序对形成半直积群 $G_1 \rtimes G_2 = \{\langle ee \rangle, \langle ea \rangle, \langle re \rangle, \langle ra \rangle, \langle r^2e \rangle, \langle r^2a \rangle, \langle r^3e \rangle, \langle r^3a \rangle\}$

群乘法满足 $g_{1p} g_{2p} = \langle g_{1p} g_{2p} \rangle \langle g_{1q} g_{2q} \rangle = \langle g_{1p} \Phi_{g_{2q}}(g_{1q}) g_{2p} g_{2q} \rangle$

此半直积群同构于 D_4 , 同构映射为 $\begin{pmatrix} \langle ee \rangle & \langle ea \rangle & \langle re \rangle & \langle ra \rangle & \langle r^2e \rangle & \langle r^2a \rangle & \langle r^3e \rangle & \langle r^3a \rangle \\ e & a & r & ra & r^2 & r^2a & r^3 & r^3a \end{pmatrix}$

20. 若 $G = H \oplus K$ 证明商群 G/H 与 K 同构, G 与 H, K 同态

由直积群的定义 $\forall g \in G$ 可唯一分解为 $g = hk$ 且 $h \in H, k \in K, hk = kh$.

考虑映射 $\pi: G \rightarrow K$, 剔除 h $\pi(g) = k$ 唯一分解保证满映射. $h_1 h_2 \in H \quad k_1 k_2 \in K$

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \pi(g_1 g_2) = \pi(h_1 k_1 h_2 k_2) = \pi(h_1 h_2 k_1 k_2) = k_1 k_2$$

$$\pi(g_1) \pi(g_2) = k_1 k_2 = \pi(g_1 g_2) \quad \text{故 } \pi \text{ 保持群乘法, } K \text{ 与 } G \text{ 为同态}$$

同理考虑映射 $\gamma: G \rightarrow H \quad \gamma(g) = h$ 可知 H 与 G 为同态

G 与 K 同态, 满足 $\pi(g_{\ker}) = k_0$ 的元素 $g_{\ker} = hk_0$ 组成同态核, 即 $h \in H$ 为同态核.

由同态核定理, 商群 $G/H \cong K$.

21 若 $G = H \oplus K$. 证明商群 G/H 与 K 同构, G 与 K 同态

由直积群的定义 $\forall g \in G$ 可唯一分解为 $g = \langle h, k \rangle$ 且 $h \in H, k \in K$.

考虑映射 $\pi: G \rightarrow K$, 剔除 h $\pi(g) = k$ 唯一分解保证满映射. $\nu_K(h_j) \in H$

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \pi(g_1 g_2) = \pi(\langle h_1, k_1 \rangle \langle h_2, k_2 \rangle) = \pi(\langle h_1 \nu_K(h_2), k_1 k_2 \rangle) = k_1 k_2$$

$$\pi(g_1) \pi(g_2) = k_1 k_2 = \pi(g_1 g_2) \quad \text{故 } \pi \text{ 保持群乘法, } K \text{ 与 } G \text{ 为同态, } H \text{ 为同态核}$$

由同态核定理 $G/H \cong K$.

22 一个群与其子群不一定同态.

例如: D_3 的子群 $C_3 = \{e, d, f\}$. 若 D_3 与 C_3 同态, 则同态核为 $\{e, a, b, c\} = H$

由同态核定理 H 是 D_3 的不变子群, 但 H 不是 D_3 子群.

故 D_3 与 C_3 不同态

第二章课后习题.

1. 设 $A(g)$ 是群 G 的一个表示, 证明复共轭 $A^*(g)$ 也是 G 的一个表示 (不可约, 正交性质相同)

由群表示定义, 存在同态映射 $A: G \rightarrow$ 矩阵群 M st. $\forall g_\alpha \in G$ 有 $A(g_\alpha) \in M$

映射 A 保持群乘法 $\forall g_\alpha, g_\beta \in M, A(g_\alpha g_\beta) = A(g_\alpha) A(g_\beta) \quad A(g_0) = E$

$*$: $M \rightarrow M^*$ 取复共轭, M^* 仍为矩阵群; $A^*: G \rightarrow M \rightarrow M^*$ 为同态映射

A^* 保持群乘法 $A^*(g_\alpha g_\beta) = A^*(g_\alpha) A^*(g_\beta) \quad A^*(g_0) = E$ 故 $A^*(g)$ 也是 G 的一个表示

若 A 不可约, $(\chi^A | \chi^A) = 1 \Rightarrow (\chi^{A^*} | \chi^{A^*}) = 1$ A^* 也不可约

反证: 若 A 是正交表示, A^* 不是正交的 $[A^*(g)]^+ A^*(g) = A^T(g) A^*(g) \neq E$

取转置 $A^T(g) A(g) \neq E$ 与假设矛盾 故 A^* 是正交的

2. G 与 $[A^T(g)]^+, [A^*(g)]^+$ 之间可以构造同构映射, 保持乘法且有对应单位元

特征标内积性质 $(\chi^A | \chi^A) = 1 \Rightarrow (\chi^{A^*} | \chi^{A^*}) = (\chi^{(A^*)^+} | \chi^{(A^*)^+}) = 1$

反证法证明 A 是正交表示, 则 $(A^T)^{-1}$ 和 $(A^*)^{-1}$ 都是正交表示.

3. $A(g)$ 是 G 的一个表示

对 $A^T(g) \quad A^T(g_1 g_2) = [A(g_1) A(g_2)]^T = A^T(g_2) A^T(g_1)$

$A^*(g) \quad A^*(g_1 g_2) = [A(g_1) A(g_2)]^+ = A^+(g_2) A^+(g_1)$

故仅当 $A(g_1 g_2) = A(g_2 g_1)$ 即 G 为 Abelian 群时 $A^T(g)$ 和 $A^*(g)$ 是 G 的一个表示.

4. 设 $A(g)$ 是有限群 G 的一个不可约表示, C 是 G 中的一个共轭类, λ 为常数, E 为单位矩阵

证明 $\sum_{g \in C} A(g) = \lambda E$.

$$\forall g_\alpha \in G, A(g_\alpha) \sum_{g \in C} A(g) = A(g_\alpha) \sum_{g \in C} A(g g_\alpha^{-1} g_\alpha) = \sum_{g \in C} A(g_\alpha g g_\alpha^{-1}) \cdot A(g_\alpha)$$

由共轭类定义 $g_\alpha g g_\alpha^{-1} \in C$ 且 C 中 $g_i \neq g_j$ 有 $g_\alpha g_i g_\alpha^{-1} \neq g_\alpha g_j g_\alpha^{-1}$

则 $\sum_{g \in C} A(g_\alpha g g_\alpha^{-1})$ 仍是对 C 中所有元素的表示矩阵之和 $\sum_{g \in C} A(g)$

由 Schur 引理 = (不可约表示 A , 矩阵 M 与 $A(g)$ $\forall g \in G$ 对易则 $M = \lambda E$)

$$A(g_\alpha) \sum_{g \in C} A(g) = \sum_{g \in C} A(g) A(g_\alpha) \quad \text{即} \quad \sum_{g \in C} A(g) = \lambda E.$$

5. 同上.

6. 三阶群 $G = C_3 = \{e, \alpha, \alpha^2\}$ 循环群为 Abelian 群, 每个元素自成一类, 共三类

即 C_3 有三个不等价不可约表示, 维数为 s_1, s_2, s_3 $A^p(\alpha) =$

又由 Burnside 定理 $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = n$ 可知均为一维表示 $\exp[(p-1)2\pi i/n]$ $p=1, 2 \dots n$.

① 恒等表示 $A^1(e) = A^1(\alpha) = A^1(\alpha^2) = 1$

② $A^2(e) = 1$ $A^2(\alpha) = \exp(\frac{2}{3}\pi i)$ $A^2(\alpha^2) = \exp(\frac{4}{3}\pi i)$

③ $A^3(e) = 1$ $A^3(\alpha) = \exp(\frac{4}{3}\pi i)$ $A^3(\alpha^2) = \exp(\frac{2}{3}\pi i)$

7. 设 $A(g)$ 是有限群 G 的一个不可约表示, $B(g)$ 是 G 的一个一维非恒等表示

证明 $C(g) = A(g) \otimes B(g)$ 是 G 的一个不可约表示.

特征标内积 $(\chi^C | \chi^C) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi^{A*}(g_i) \chi^{B*}(g_i) \chi^A(g_i) \chi^B(g_i)$

$A(g)$ 是不可约表示 $\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi^{A*}(g_i) \chi^A(g_i) = 1$

$B(g)$ 是一维非恒等表示 $|\chi^B(g_i)| = \chi^{B*}(g_i) \chi^{B*}(g_i) = 1$.

故 $(\chi^C | \chi^C) = 1$ 直积表示是不可约的.

8. 四阶群 $V = \{e, a, b, c\}$ 是一个 Abelian 群, 每个元素自成一类, 共有 4 类, 即 4 个不等价的不可约表示.

由 Burnside 定理 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 = n$ $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 1$ 均为一维表示. $G \otimes G = \begin{Bmatrix} 1, 1 \\ 1, -1 \end{Bmatrix}$

$$\textcircled{1} A^1(e) = A^1(a) = A^1(b) = A^1(c) = 1 \quad \textcircled{2} A^2(e) = A^2(b) = 1 \quad A^2(a) = A^2(c) = -1$$

$$\textcircled{3} A^3(e) = A^3(a) = 1 \quad A^3(b) = A^3(c) = -1 \quad \textcircled{4} A^4(e) = A^4(c) = 1 \quad A^4(a) = A^4(b) = -1$$

9. D_3 群 $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ 共有 3 类 $\{e\}, \{d, f\}, \{a, b, c\}$ 故有 3 个不等价的不可约表示.

由 Burnside 定理可知 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = n$ $S_1 = S_2 = 1$ $S_3 = 2$ 有 2 个一维表示, 1 个二维表示.

$$\textcircled{1} A^1(e) = A^1(a) = A^1(b) = A^1(c) = A^1(d) = A^1(f) = 1$$

$$\textcircled{2} A^2(e) = A^2(d) = A^2(f) = 1 \quad A^2(a) = A^2(b) = A^2(c) = -1$$

$$\textcircled{3} A^3(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3(b) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad A^3(c) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \exp(i\frac{2\pi}{3})$$

$$A^3(d) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \quad A^3(f) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\text{群表示的正交定理} \quad \sum_{i=1}^n (A_{\mu\nu}^p(g_i))^* A_{\mu'\nu'}^q(g_i) = \frac{1}{g} \delta_{pp'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}$$

10. D_3 在二次齐次函数空间 $\{\Psi_1(\vec{r}) = x^2, \Psi_2(\vec{r}) = y^2, \Psi_3(\vec{r}) = z^2, \Psi_4(\vec{r}) = xy, \Psi_5(\vec{r}) = yz, \Psi_6(\vec{r}) = xz\}$ 的表示

$$A(g)\Psi_i(\vec{r}) = \Psi_i(g\vec{r})$$

$$\text{以 } A(d) \text{ 为例: } d\vec{r} = f\vec{r} = (-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, z)$$

$$A(d)\Psi_1(\vec{r}) = \Psi_1(f\vec{r}) = (-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy \quad \text{即 } \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0 \text{ 为第一列向量}$$

表示矩阵是 6×6 矩阵, 作为可约表示在 A^1, A^2, A^3 不可约表示的重叠度可由特征标内积得到

11. 四阶循环群 $C_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ 左正则表示.

乘法表	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(a^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右正则表示

$$\bar{D}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{D}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{D}(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{D}(a^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. 设 $A^1(g)$ 和 $A^r(g)$ 是群 G 的两个不等价不可约表示.

直积表示 $B = A^1(g) \otimes A^{r*}(g)$ 中恒等表示的重数

不可约表示

$$(\chi^B | \chi^A) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} (\chi^1(g) \chi^{r*}(g)) \chi^A(g) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi^{r*}(g) \chi^1(g) = (\chi^r | \chi^1) = 0.$$

直积表示 $C = A^1(g) \otimes A^{p*}(g)$ 中恒等表示的重数

$$(\chi^C | \chi^A) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} (\chi^1(g) \chi^{p*}(g)) \chi^A(g) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi^{p*}(g) \chi^1(g) = (\chi^p | \chi^1) = 1$$

13. 取子群 H 的表示为左正则表示, 由其诱导导出群 G 的表示 $\mathcal{U}$

设子群 H 的阶数为 m , G 的阶数为 n , 则 H 的正则表示维数为 m , 诱导 G 的表示维数为 n/m

$$h\alpha \text{ 的左正则表示 } [L(h\alpha)] \text{ 第 } hr \text{ 列非零矩阵元所在行} = \text{乘法表中 } h\alpha hr = h\beta \text{ 元素所在行} \quad [L(h\alpha)]_{h\beta, hr} = \delta_{h\beta, h\alpha hr}$$

诱导表示中 (g_i, g_j) 小矩阵中的 $(h\alpha, h\beta)$ 矩阵元

$$[U(g)]_{h\alpha g_i, h\beta g_j} = [L(g g g_i^{-1})]_{h\alpha, h\beta} = [L(g g g_j^{-1})]_{h\alpha, h\beta} = \delta_{h\alpha, g g g_j^{-1} h\beta} = \delta_{h\alpha h\beta, g g g_j^{-1}}$$

$g g g_j^{-1} \in H$

14 有限群 G 的非恒等的不可约表示的特征标之和 $\sum_{g \in G} \chi^p(g)$.

A^1 为恒等表示 $\chi^{A^1}(g) = 1 \quad \forall g \in G$.

$$\sum_{g \in G} \chi^p(g) = n \times \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi^p(g) \chi^{A^1}(g) = n \times (\chi^p | \chi^1) = 0$$

15. 以 $f_1(\vec{r}) = x^2, f_2(\vec{r}) = y^2, f_3(\vec{r}) = xy$ 为基, 写出 D_3 的三维表示.

以 $A(d)$ 为例 $d^{-1}\vec{r} = f\vec{r}$

$$A(d) f_1(\vec{r}) = f_1(d^{-1}\vec{r}) = f_1(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, z) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy \quad \text{即以 } \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 为第1列向量.}$$

表示矩阵是 3×3 矩阵 特征标为 $\chi^A\{e\} = 3 \quad \chi^A\{d, f\} = 0 \quad \chi^A\{a, b, c\} = 1$

$$(\chi^A | \chi^A) = \frac{1}{6} (1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1) = 1$$

$$(\chi^A | \chi^{A^2}) = \frac{1}{6} (1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 + 3 \cdot 1 \cdot (-1)) = 0 \quad A = A^1 \oplus A^2$$

$$(\chi^A | \chi^{A^3}) = \frac{1}{6} (1 \cdot 3 \cdot 2 + 0 + 0) = 1$$

16. 基于子群 $C_2 = \{e, a\}$ 的恒等表示 $A(e) = A(a) = 1$, 写出 D_3 的诱导表示. 陪集 $\{G, dG, fG\}$

$$U(e) = \begin{pmatrix} A(eee^{-1}) & A(eed^{-1}) & A(eef^{-1}) \\ A(dee^{-1}) & A(ded^{-1}) & A(def^{-1}) \\ A(fee^{-1}) & A(fed^{-1}) & A(fef^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \dots$$

特征标为 $\chi^U\{e\} = 3 \quad \chi^U\{d, f\} = 0 \quad \chi^U\{a, b, c\} = 1$

$$(\chi^U | \chi^A) = \frac{1}{6} (1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1) = 1$$

$$(\chi^U | \chi^{A^2}) = \frac{1}{6} (1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 + 3 \cdot 1 \cdot (-1)) = 0 \quad U = A^1 \oplus A^2$$

$$(\chi^U | \chi^{A^3}) = \frac{1}{6} (1 \cdot 3 \cdot 2 + 0 + 0) = 1$$

17 D_3 所有不可约表示相互之间的直积, 并约化

附前两章基本定理

① 重排定理: $\forall h \in G$, 当 h 取遍群 G 中所有元素时, hg_x 给出且仅仅一次给出 G 中所有元素.

② 陪集定理: 设群 H 是群 G 的子集, 则 H 的两个左陪集或者完全相同, 或者无公共元素.

③ 拉格朗日定理: 有限群子群的阶, 必为群阶的因子

④ 有限群的每个类中元素的个数都是群阶的因子.

⑤ H 是 G 的不变子群, $\forall f \in G, f^{-1}Hf = H$. 给出+证次.

⑥ 不变子群的左陪集与右陪集是重合的.

⑦ 同态核定理: 设 G 与 F 同态, 则有

1) 同态核 H 是 G 的不变子群 2) 商群 G/H 与 F 同构.

⑧ 凯莱定理: 群 G 同构于置换群 S_G 的一个子群

⑨ 轨道稳定子定理: 设 G^x 是 G 对 x 的逆向子群/轨道稳定子 $G^x = \{h | h \in G, hx = x\}$. 则 G^x 的每个左陪集 $g_i G^x$ 将 x 映射 G 中另一点 y [含 x 的 G 轨道上的点与 G^x 左陪集一一对应].

$\Rightarrow$ 群 G 的阶数为 n , G 对 x 的轨道稳定子 G^x 阶数为 m , 则 G^x 的左陪集个数为 n/m , 含 x 的轨道上点的个数也为 n/m 个.

⑩ 有限群 表示可约 $\Leftrightarrow$ 表示完全可约 表示 $\Leftrightarrow$ 正规表示.

⑪ 正规表示可约 $\Leftrightarrow$ 完全可约

⑫ Schur 引理一: 设群 G 在空间 V_A, V_B 上有不可约表示 A 与 B

若对 $\forall g \in G$, 有线性变换 $M: V_A \rightarrow V_B$ s.t. $B(g_\alpha) = M A(g_\alpha) M^{-1}$

则 1) A, B 不等价 $M=0$ 2) $M \neq 0$ A, B 等价

⑬ Schur 引理二: 设群 G 在空间 V 上有不可约表示 A , 若 V 上线性变换 M 满足

$$M A(g_\alpha) = A(g_\alpha) M \quad \forall g_\alpha \in G, \text{ 则 } M = \lambda E$$

$\Rightarrow$ 不等价不可约正规表示矩阵元在群函数空间正交完备.

不等价不可约表示的特征标在类函数空间正交完备.

